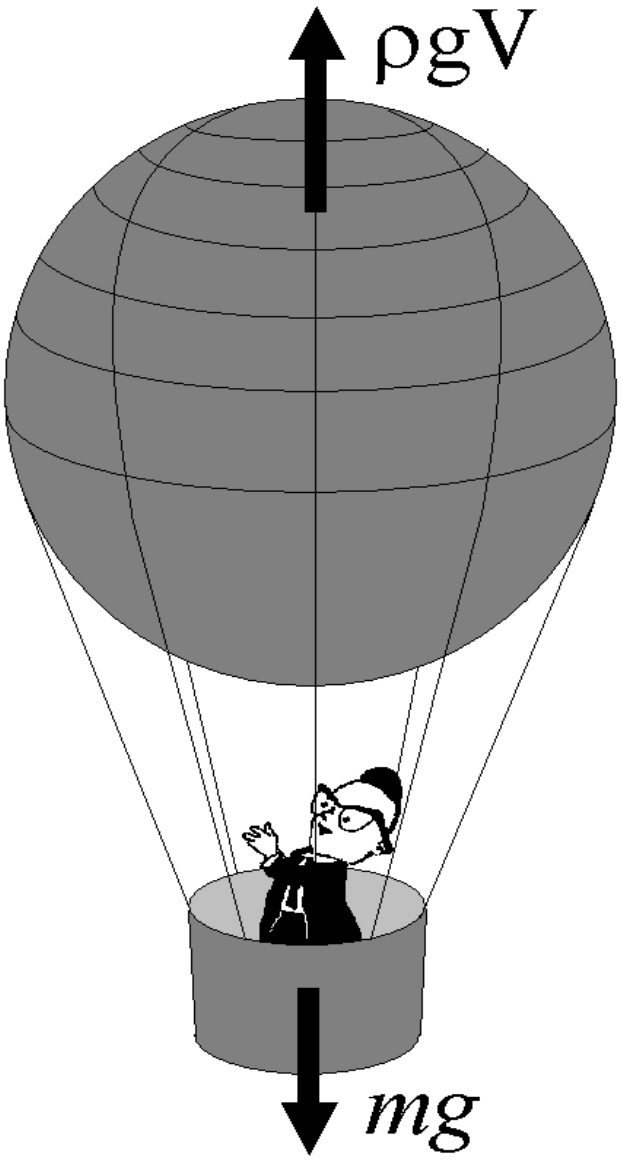
А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов,
Л.А. Мельников, А.В. Савин, В.Н. Шевцов

50

ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ



А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов,
Л.А. Мельников, А.В. Савин, В.Н. Шевцов

50
ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Саратов
Издательство «Научная книга»
2006

УДК 530.77
К89

Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Мельников Л.А., Савин А.В., Шевцов В.Н.
50 олимпиадных задач по физике. – Саратов: изд-во «Научная книга», 2006, 60 с.
ISBN 5-9758-0110-9

Сборник содержит 50 оригинальных задач физических олимпиад, которые будут полезны будущим исследователям. Ко всем задачам даны подробные решения.
Сборник будет полезен учащимся, заинтересованным в глубоком изучении физики, и их учителям.

Оригинал-макет подготовлен А.В. Савиным

Иллюстрации С.П. Кузнецова

© А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Л.А. Мельников,
А.В. Савин, В.Н. Шевцов, 2006

ISBN 5-9758-0110-9

П Р Е Д И С Л О В И Е

…О далеком будущем с его колоссальными
проблемами, которые мы сейчас не в
состоянии разрешить, но можем поставить,
о будущем, которое предстает перед нами,…
как великолепный, но грозный мир человеческого
духа, озаряемый молниями великих задач и дел…
А.Стругацкий, Б.Стругацкий

…Оказывается, кроме нашего привычного
мира с метрикой Римана, принципом
неопределенности, физическим вакуумом
и пьяницей Брутом, существуют и другие
миры с ярко выраженной реальностью…
А.Стругацкий, Б.Стругацкий

Профессия ученого-исследователя очень увлекательна. Она дает возможность почувствовать себя “магом”, который раскрывает тайны и загадки природы. Если Вы – настоящий исследователь, то для Вас, наряду с обычным миром проблем и катаклизмов, существует и другой: мир науки. Мир очень интересный, а главное, вполне реальный и весьма населенный.

Как попасть в этот мир? Опыт показывает, что для этого нужно тренировать свои творческие возможности, нужны упорство и желание добиться своей цели. Очень важно попасть в какую-либо научную школу, которая активно работает и занимается исследованиями. Атмосфера такой школы, ее традиции и внутренние законы развития сделают из Вас ученого.

Однако первым шагом в научный мир может стать решение физических задач повышенной трудности, или олимпиадных задач. Каждая такая задача – это маленькая проблема, которую Вы должны решить самостоятельно. Олимпиадные задачи – это своего рода модели тех научных задач, которые встречаются в работе ученых.

Заметим, что преимущество олимпиадного задачника в том, что Вы можете посвятить одной задаче много времени (хоть целый месяц!) в отличие от самой олимпиады, где на пять задач отводится обычно четыре ча-

са. А ведь именно так происходит в реальном научном творчестве, когда одну задачу решают иногда даже не месяцы, а годы. Кроме того, Вы можете обсуждать задачи с друзьями, и решать их вместе методом «мозгового штурма», а это очень интересно и тоже принято в науке!

В настоящий сборник включены некоторые задачи, придуманные авторами для олимпиад, проводившихся в Саратове в разные годы. Ко всем задачам приведены решения и ответы. Мы рекомендуем познакомиться с решениями в любом случае – даже если Вы уверены, что решили задачу, ведь всегда могут быть определенные «тонкости», с которыми полезно познакомиться. Тем более это стоит сделать, если после приложенных усилий задачу решить не удалось. Даже в этом случае упорная тренировка со временем повысит Ваш уровень.

Авторы хотели бы выразить благодарность профессорам Саратовского государственного университета А.С. Шаповалову, Б.С. Дмитриеву, Ю.И. Левину, М.Н. Куликову, С.Б. Венигу, возглавлявшим в разные годы оргкомитет по проведению олимпиад. Авторы также благодарны В.П. Вешневу, В.Л. Дербову, А.И. Жбанову, А.А. Князеву, А.Б. Осину, М.И. Перченко, А.Г. Рожневу, Е.П. Селезневу, М.М. Стольницу, Г.Н. Татаркову, всем членам оргкомитета за увлекательные дискуссии, в ходе которых часто рождались идеи задач. Отметим благожелательную поддержку со стороны Е.И. Прилуцкого, который был большим энтузиастом олимпиад школьников.

Мы будем рады, если юные читатели этого сборника придут со временем в научные лаборатории. Желаем успехов всем, кто интересуется наукой!

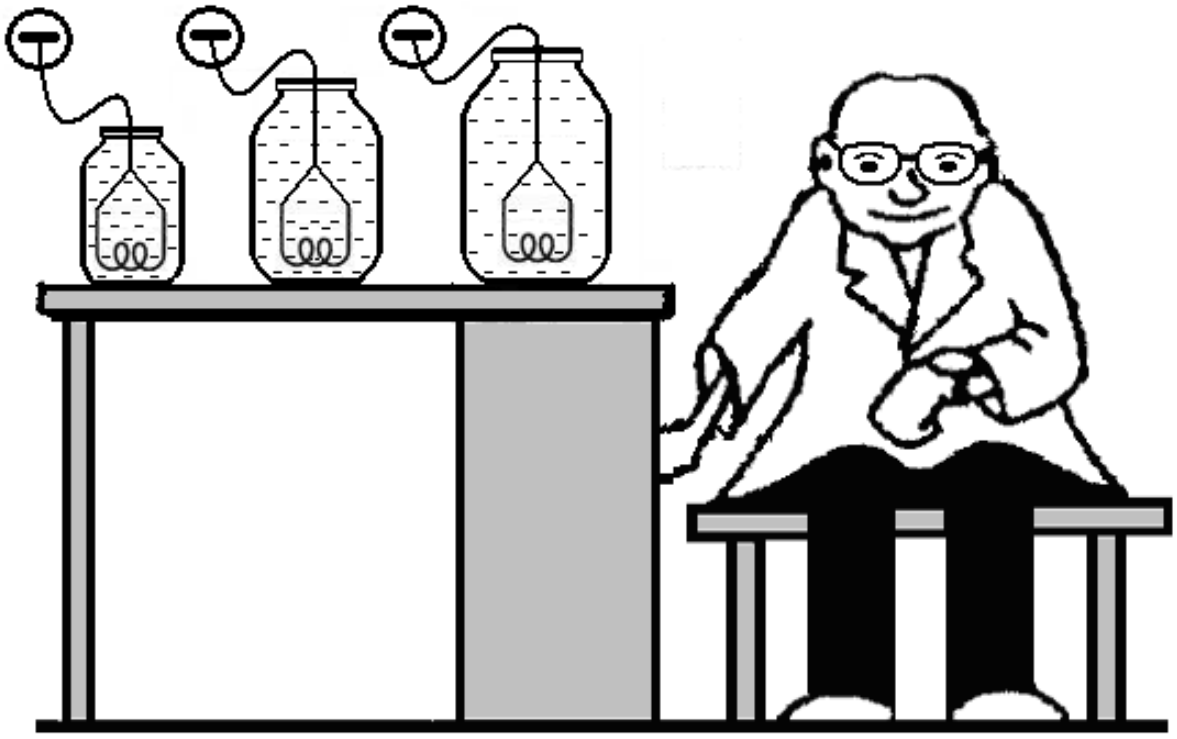
Авторы

ЧАСТЬ I.

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ

…Но я был один, и я решил рискнуть,
а заодно и попрактиковаться…

А.Стругацкий, Б.Стругацкий



1. Балда выпустил зайца одновременно с тем, как бесенок побежал “по берегу морскому” (см. рис.1). Заяц побежал по кратчайшему расстоянию, равному 2 верстам, “в лесок до дому” со скоростью 30 верст/час. Возвращаясь, бесенок видел зайца, мелькнувшего за первыми деревьями леса, но не придал этому значения. Найдите скорость, развиваемую бесенком, если известно, что при беге он может смотреть только вперед, а радиус “моря” равен 2 верстам.

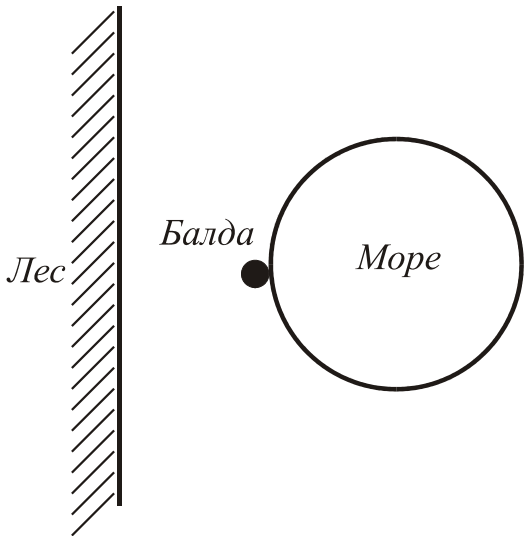


Рис. 1

2. Знайка живет в доме, стоящем около дороги между остановками ***A*** и ***B*** на расстоянии 800 *м* от ***A***. В направлении от ***A*** к ***B*** по дороге каждый день проезжают автобус со скоростью 40 *км/ч* и трамвай со скоростью 20 *км/ч*. На остановку ***B*** они приезжают одновременно в 8 часов утра. В какое самое позднее время должен выйти из дома Знайка, чтобы успеть уехать на автобусе? на трамвае? Знайка ходит со скоростью 4,8 *км/ч*, расстояние между остановками 2 *км*. Время, которое транспорт стоит на остановке, очень мало.

3. Крокодил Гена ездит на работу в зоопарк на автобусе, который всегда ходит точно по расписанию. Домик Гены стоит около дороги между остановками ***A*** и ***B*** на расстоянии l от остановки ***A***. Автобус едет в направлении от ***A*** к ***B*** с постоянной скоростью V. Найдите, за какой минимальный промежуток времени до прибытия автобуса на остановку ***B*** Гена должен выходить из дома, чтобы успеть на него, если крокодил ходит со скоростью U, а время, в течение которого автобус стоит на остановке, пренебрежимо мало. Расстояние между остановками равно L.

4. Когда хвост ползущего Удава поравнялся с пальмой, под которой сидела Мартышка, она, решив измерить длину Удава, побежала вдоль него и положила банан рядом с его головой. Затем Мартышка побежала обратно и положила второй банан рядом с кончиком хвоста Удава. Потом пришел

Попугай и измерил расстояния от пальмы до каждого из бананов, которые оказались равными 16 и 48 попугаев. Найдите длину Удава в попугаях, а также определите, во сколько раз быстрее бегает Мартышка, чем ползает Удав.

5. На бесконечной прямой дороге расположено бесконечное количество светофоров так, что расстояние между соседними светофорами равно L. Каждый светофор в течение времени T показывает красный свет, затем в течение времени T – зеленый, затем опять красный и т.д., причем на двух соседних светофорах в любой момент времени горит разный цвет. Два автомобиля одновременно начинают движение с постоянными скоростями от двух светофоров, расположенных на расстоянии $2L$ друг от друга, в тот момент, когда на них загорается зеленый цвет. “Задний” автомобиль едет с максимально возможной скоростью, позволяющей проезжать все светофоры без остановок. “Передний” автомобиль движется с постоянной скоростью v. Он мгновенно останавливается, если подъезжает к светофору с горящим красным светом, и также мгновенно набирает скорость v после загорания зеленого света. Определите, догонит ли “задний” автомобиль “передний” (и если да, то за какое время), если вышеперечисленные правила движения не нарушаются, а переключение светофоров происходит мгновенно.

6. Лабораторией профессора А.А. Выбегалло предложена новая система измерения скорости автомобиля, использующая инновационные высокоточные технологии и состоящая в следующем. На обод одного из колес автомобиля крепится датчик. Установленный на автомобиле бортовой компьютер с большой точностью фиксирует положение этого датчика через равные промежутки времени τ. Затем определяется угол φ между двумя последовательными положениями датчика (см. рис. 2), по нему рассчитывается угловая скорость вращения колеса как $\omega=\varphi/\tau$ и затем скорость движения автомобиля. При испытаниях системы оказалось, что при установке датчиков на передние колеса модели получаемые значения скорости хорошо совпадают с истинными вплоть до величины 10 м/с, после чего измеряемые предложенным способом значения становятся существенно меньше истинных. После установки датчика на

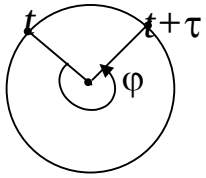


Рис. 2

заднее колесо значение скорости, при котором начинается расхождение результатов, увеличилось до 15 м/с. Объясните причину плохой работы системы при больших скоростях. Найдите диаметр заднего колеса и интервал времени τ, если диаметр переднего колеса модели равен 10 см. Считайте, что колеса модели в процессе движения не проскальзывают.

7. Поливая грядки из шланга, садовник направляет тонкую струю воды под углом α к горизонту. Считая, что в воздухе струя не распадается на капли, определите ее диаметр в верхней точке траектории, если внутренний диаметр шланга равен d_0. Сопротивлением воздуха пренебречь, диаметр шланга считайте малым по сравнению с дальностью полета струи.

8. Определите, каким образом должна изменяться со временем угловая скорость вращения ведущей катушки магнитофона для того, чтобы линейная скорость движения ленты была постоянна и равна v. Радиус катушки R, толщина ленты d. Считайте, что $d \ll R$, а в начальный момент времени вся лента намотана на другую катушку.

9. Прибор для измерения плотности жидкости – ареометр – в простейшем случае представляет собой цилиндрическое тело, внутри нижней части которого закреплен груз, обеспечивающий устойчивое плавание ареометра в вертикальном положении, а на боковую поверхность нанесена шкала плотностей так, что при плавании ареометра в однородной жидкости он погружается точно до отметки, соответствующей ее плотности. В широкий и глубокий сосуд с водой поверх нее налит слой бензина толщиной h=10 см. Какую плотность покажет ареометр массой M=10 грамм, опущенный в этот сосуд? Как изменятся его показания, если толщину слоя бензина увеличить вдвое? Считайте, что диаметр ареометра намного меньше диаметра сосуда. Плотность воды 1,0 г/см^3, бензина 0,75 г/см^3, площадь поперечного сечения ареометра 1 см^2.

10. На один конец легкого тонкого стержня нанизан шарик из свинца, на другой – шарик из алюминия. Стержень опирается серединой на острие и находится в горизонтальном равновесии в воде, при этом расстояние между центрами шариков l=20 см и они расположены симметрично относительно точки опоры. В какую сторону и на какое расстояние

нужно будет сдвинуть алюминиевый шарик для сохранения равновесия в воздухе? Плотность свинца ρ_1=11300 кг/м^3,алюминия ρ_2=2700 кг/м^3, воды ρ=1000 кг/м^3.

11. Согласно одной из средневековых моделей мира, Земля лежит на спине кита, плавающего в океане. Оцените характерные размеры этого кита. Землю считайте полусферой радиуса R=6400 км, плотность земных пород $\rho_з$=5,5 г/см^3, плотность кита – $\rho_К$=0,9 г/см^3.

Указание: кита можно представить в виде цилиндра, диаметр которого в несколько (например, в 10) раз меньше его длины.

12. Оцените длину шкурки, которую снимают, почистив килограмм картошки. Килограмм какой картошки можно быстрее почистить: крупной или мелкой? Отдельно рассмотрите предельный переход к случаю очень мелкой картошки.

13. Открытый сверху цилиндрический бак полностью наполнялся водой из крана за время t_1. Со временем в его дне образовалось небольшое отверстие, через которое вся вода из полностью наполненного бака при закрытом кране выливается за время t_2. Теперь пустой бак поставили под открытый кран на промежуток времени, много больший как t_2 ,так и t_1. За какое время выльется вся вода из бака, если кран закрыть? Скорость истечения воды из крана постоянна.

14. На рис. 3 показана схема известного опыта, демонстрирующего инертность тел. Начиная с некоторого момента времени, нижнюю нить тянут с постоянной силой f. В зависимости от величины силы рвется либо нижняя, либо верхняя нить. Найдите условия, при которых реализуются эти ситуации. Считайте, что разрыв нити наступает при натяжении T; вплоть до разрыва нить имеет постоянный коэффициент жесткости k. Масса груза M, нить невесома.

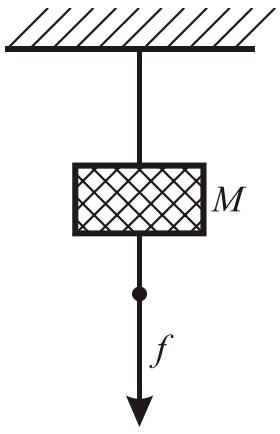


Рис. 3

15. Тело массой m=2 кг движется вдоль оси x по гладкой горизонтальной плоскости. График зависимости v_x от x показан на рис. 4. Постройте график зависимости модуля силы, действующей на тело, от времени.

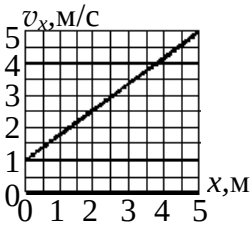
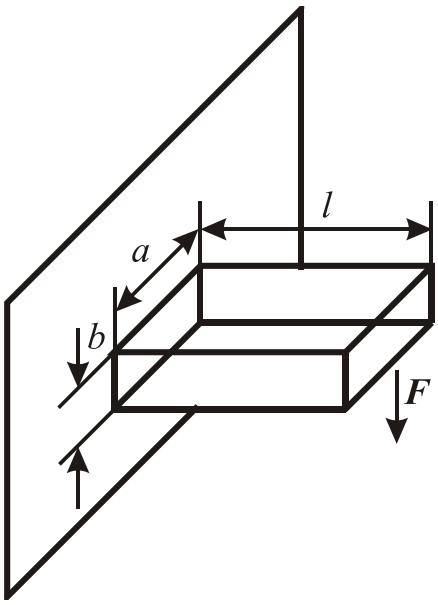


Рис. 4

16. Горизонтальная балка прямоугольного сечения жестко заделана одним концом в стену. К другому концу балки проложена сила $\boldsymbol{F}$ (см. рис. 5). Смещение y конца балки зависит от силы F, длины l, ширины a и толщины балки b, а также от модуля Юнга E – коэффициента с размерностью Н/м^2, характеризующего материал балки. Ниже приведено шесть вариантов этой зависимости, причем верным является только один из них. Какой?



1) $y=\dfrac{4Fl^3}{Eab^3}$, 4) $y=\dfrac{4Fl^3}{Ea^2b^2}$,

2) $y=\dfrac{4Fl^5}{Eab}$, 5) $y=\dfrac{4Fb^3}{Eal^3}$,

3) $y=\dfrac{4F^2l^2}{E^2a^2b^3}$, 6) $y=\dfrac{4Fl^2}{Eab}$.

Рис. 5.

17. К наклонной стенке, составляющей малый угол α с вертикалью, подвешен на невесомой нерастяжимой нити тяжелый шарик. Его отвели влево на малый угол β, больший α (см. рис. 6), и отпустили. Удары шарика о стенку таковы, что отношение кинетической энергии шарика сразу после удара к кинетической энергии шарика сразу перед ударом равно K ($0<K<1$). Определите последовательность максимальных отклонений шарика влево.

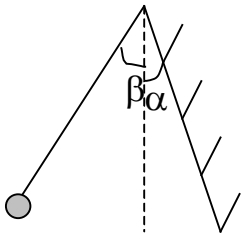


Рис. 6

18. К вбитому в стену гвоздю на невесомой нерастяжимой нити длины L подвешен маленький тяжелый груз. Под гвоздем на расстоянии l от нижнего положения груза ($l<L$) вбит еще один гвоздь. Груз отклоняют вправо так, что нить образует острый угол α с вертикалью (см. рис. 7), и отпускают без начальной скорости. Перечислите все возможные качественно различные типы поведения этой системы и изобразите соответствующие им области на плоскости безразмерных параметров (l/L, $\cos\alpha$). Потерями энергии пренебречь.

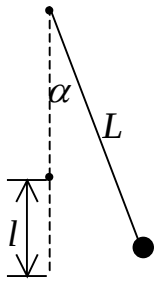


Рис. 7

19. На доске массы M лежит небольшой брусок массы m (см. рис. 8). Коэффициент трения между доской и бруском равен μ_1, а между доской и поверхностью – μ_2. К бруску приложена горизонтальная сила F. Укажите все возможные качественно различные варианты поведения системы и изобразите на плоскости параметров (μ_1, μ_2) соответствующие им области.

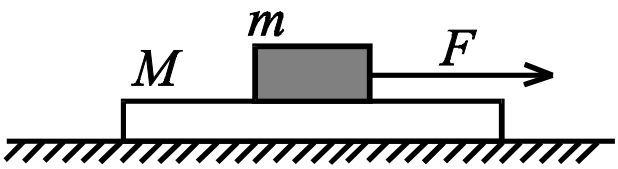


Рис. 8

20. Перекидывая легкую нить с привязанными к ее концам грузами через блок, ученик заметил, что она находится в равновесии, если массы грузов различаются не более чем в 2 раза, и соскальзывает в противном случае. Определите коэффициент трения нити по блоку.

21. На столе лежит книга размером $l\times l$. Наименьшая работа, необходимая для того, чтобы раскрыть ее на середине, равна A. Сколько весит книга?

22. Резкий порыв ветра вызвал по всему озеру почти квадратной формы со стороной L=10 км систему волн длины λ около 50 см и с амплитудой a примерно 10 см. Оцените потенциальную энергию этой системы волн относительно равновесного положения воды. Оцените, насколько может подняться температура воды, когда волны затухнут. Возрастет или уменьшится изменение температуры для озера той же глубины, но с

бóльшими сторонами? Глубина озера h=10 м, теплоемкость воды c=4,2·10^3 Дж/(кг·К).

23. Определите максимальное ускорение, с которым заднеприводный автомобиль с расстоянием между осями L=1,2 м, центр тяжести которого расположен на высоте h=1 м от земли посередине между осями, может начать двигаться, если он находится а) на льду, б) на асфальте. Коэффициент трения скольжения колес по льду 0,1; по асфальту 0,7.

24. Шарнирная конструкция в виде квадрата лежит на гладком горизонтальном столе и скреплена с ним в вершине A (см. рис. 9). Шарниры B и C соединены пружиной жесткости k. Найдите период малых колебаний системы, если массами пружин, стержней, шарниров B и C по сравнению с массой m шарнира H можно пренебречь, а трение всюду отсутствует.

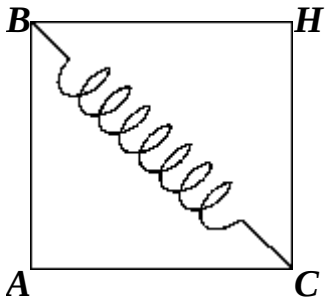
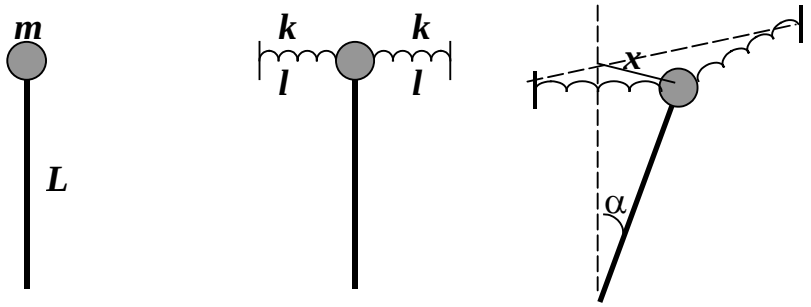


Рис. 9

25. Математический маятник в виде невесомого стержня с грузом массы m находится вблизи верхнего (неустойчивого) положения равновесия (рис. 10а). Маятник может совершать движения только в плоскости, перпендикулярной рисунку. Его прикрепляют к двум пружинам жесткости k так, как показано на рис. 10б. Пружины не деформированы, когда маятник находится точно в верхнем положении равновесия. Маятник смещают на очень малое расстояние перпендикулярно плоскости рисунка и отпускают (рис. 10в). Найдите размах колебаний маятника. Считайте, что смещение маятника мало по сравнению с его длиной L и длинами недеформированных пружин l.



а) б) в)

Рис. 10

(*Указание.* Используйте, что при малых x и α справедливы соотношения $(1+x)^a \approx 1+ax$ и $\cos\alpha \approx 1-\alpha^2/2$).

26. Центр тяжести шарика радиуса r находится на расстоянии h от его геометрического центра. Шарик установлен на внутреннюю поверхность неподвижно закрепленной сферы радиуса R так, что его центр тяжести находится над геометрическим центром (см. рис. 11). На плоскости безразмерных параметров (h/r, R/r) изобразите область устойчивости такого положения равновесия.

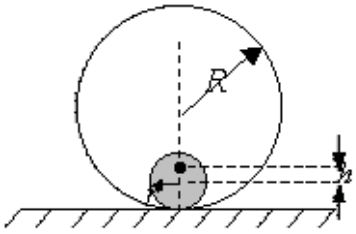


Рис. 11

27. Модель популярной в физических задачах игрушки “Ванька-встанька” представляет собой легкую твердую сферу радиуса r, внутри которой на расстоянии h от центра закреплен небольшой тяжелый груз. Определите период малых колебаний такой модели, установленной на вершину полусферы радиуса R (см. рис. 12). Полусфера неподвижна относительно земли, модель не проскальзывает по полусфере.

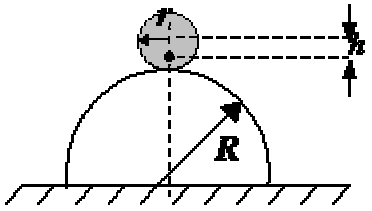


Рис. 12

28. В теплоизолированный сосуд, содержащий воду массы M при температуре T°C, бросили кусок льда массы m при температуре $-t$°C. Какие качественно различные состояния системы возможны после установления теплового равновесия? Изобразите на плоскости (T, t) области, соответствующие каждому из этих состояний. Каким точкам на этой плоскости соответствует нулевая конечная температура?

29. Небольшой алюминиевый шарик с привязанной к нему легкой ниткой вморожен в ледышку массой M_0=100 г. Свободный конец нити прикреплен ко дну теплоизолированного цилиндрического сосуда, в который налита вода (см. рис. 13) массой m_0=0,5 кг, имеющая температуру t_0=20°C. Температура льда и шарика 0°C, начальная сила натяжения нити T=0,08 Н. Какова будет температура воды в тот момент, когда сила натяжения нити станет равной ну-

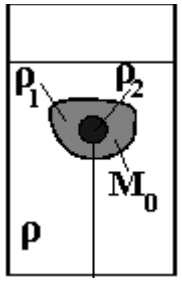


Рис. 13

лю? Удельная теплоемкость воды c=4200 Дж/(кг·°С). Плотность воды ρ=1000 кг/м^3, льда ρ_1=900 кг/м^3, алюминия ρ_2=2700 кг/м^3, удельная теплота плавления льда λ=330 кДж/кг Считайте, что тепловое равновесие в воде устанавливается мгновенно.

30. Экспериментатор набрал на улице мокрого снега, имеющего температуру 0°С, поместил его в морозильную камеру и начал через равные промежутки времени измерять его температуру, занося данные в журнал (первая запись была сделана сразу после начала эксперимента). Однако впоследствии журнал был испорчен, так что удалось прочитать только значения температуры, соответствующие десятой и одиннадцатой записям: –0,5°С и –4°С соответственно. Определите по этим данным массовую долю воды в мокром снеге. Удельная теплоемкость льда 2,1·10^{3}Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда 3,35·10^5 Дж/кг.

31. Проточный нагреватель воды Винтика и Шпунтика состоит из трубы длины L=1 м, поперечное сечение которой представляет собой прямоугольник размерами $a\times d$. Стенки размера $L\times a$ сделаны из металла, а размера $L\times d$ – из диэлектрика (см. рис. 14). Нагрев прокачиваемой по трубе воды осуществляется электрическим током, для чего к металлическим стенкам прикладывается постоянное напряжение. Определите, каким должно быть это напряжение, чтобы устройство обеспечивало нагрев 600 литров воды в час от 10°С до 60°С, если a=20 см, d=1 см. Используемая в нагревателе вода имеет следующие характеристики: плотность 10^3 кг/м^3, удельная теплоемкость 4,2·10^3 Дж/(кг·°С), удельное сопротивление 10 Ом·м. Теплоемкостью трубы и потерями тепла пренебречь.

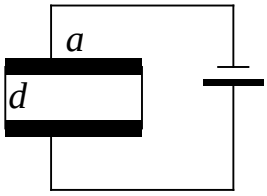


Рис. 14

32. Однажды вечером школьники решили приготовить чай, для чего опустили кипятильник мощностью P_0=300 Вт в трехлитровую банку с водой и закрыли ее крышкой. Через достаточно длительное время они с удивлением заметили, что вода не закипает, а ее температура равна 80°С и не изменяется. Смогут ли они этим же кипятильником вскипятить воду в двухлитровой банке? В литровой? Если нет, то укажите, до какой макси-

мальной температуры нагреется вода, если да, то оцените, за какое время она закипит. Считайте, что все банки геометрически подобны и заполняются водой полностью, начальная температура воды равна 20°C и совпадает с температурой воздуха в комнате. Удельная теплоемкость воды c=4200 Дж/(кг·К), теплоемкостью пустой банки можно пренебречь.

33. Домашний аквариум в виде полусферы диаметром 30 см был налит водой почти до краев и поставлен в комнате. Через двое суток уровень воды в нем понизился на 1 см. Считая, что температура и влажность воздуха в комнате постоянны, найдите время, за которое вода из аквариума полностью испарится.

34. С идеальным газом совершают цикл 1–2–3–4–5–1–2–6–5–1 (см. рис. 15). Найдите работу газа за цикл. Масштаб приведенной диаграммы считайте известным,

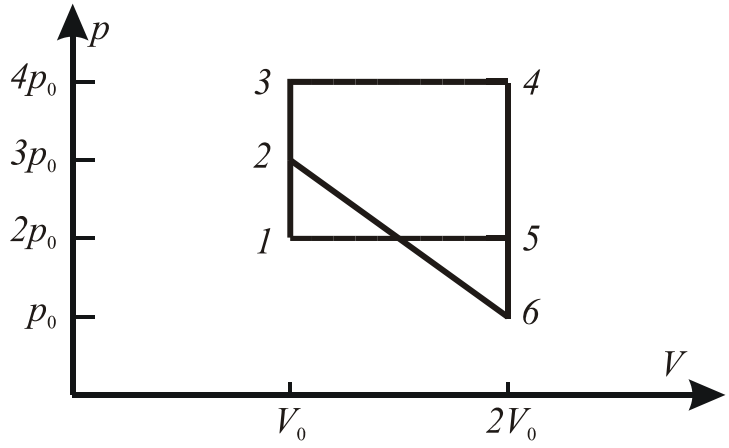


Рис. 15

35. Тепловой двигатель работает по циклу, состоящему из двух изохор и двух адиабат (см. рис. 16). Температура рабочего тела (одноатомного идеального газа) в точках 1, 2 и 4 равна соответственно T_1=524 К, T_2=786 К и T_4=300 К. Найдите температуру в точке 3 и коэффициент полезного действия двигателя.

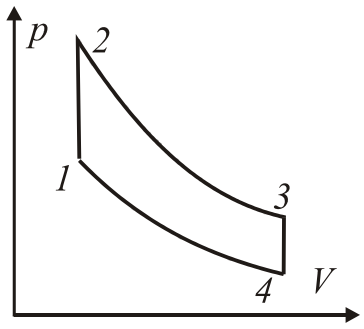


Рис. 16

36. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде с площадью основания S под поршнем массы M находится 1 моль идеального одноатомного газа. В начальном состоянии поршень находится на высоте $2h$ от дна сосуда. Газ медленно охлаждают до тех пор, пока поршень не опус-

тится до высоты h, а затем медленно нагревают до достижения поршнем исходной высоты. Определите среднюю теплоемкость газа в процессе нагревания, если между поршнем и стенками сосуда действует сила сухого трения скольжения F. Атмосферное давление p_0.

37. В вертикально стоящем цилиндрическом сосуде с площадью основания S под поршнем массы M находится 1 моль идеального одноатомного газа. Сосуд начинают медленно равномерно нагревать. Определите теплоемкость системы “сосуд-газ” в процессе расширения газа, если суммарная теплоемкость сосуда и поршня постоянна и равна C, а между поршнем и стенками сосуда действует сила сухого трения F. Ускорение свободного падения g. Атмосферное давление равно p_0. Теплообменом с внешней средой пренебречь.

38. В каждой части горизонтально расположенного цилиндрического сосуда длины $2l$, разделенного пополам поршнем массы m, находится по 1 молю насыщенного водяного пара. Сосуд поддерживается при постоянной температуре T_0.

а) Определите период малых колебаний поршня.

б) Как изменятся эти колебания, если немного нагреть сосуд? Немного охладить?

в) Каким будет период колебаний, если при температуре T_0 в каждой части сосуда находится по 1 молю воды и насыщенного водяного пара? Насыщенного водяного пара и воздуха? Молярная масса воды $M_{\text{воды}}$, воздуха $M_{\text{возд}}$, трением пренебречь.

39. Электронагреватель плоской формы рассчитан на напряжение 220 В. После того, как слева от нагревателя на небольшом расстоянии поставили плоское идеально отражающее зеркало, оказалось возможным уменьшить питающее напряжение; при этом показание термометра, установленного вблизи нагревателя справа от него, не изменилось. Найдите новое значение питающего напряжения.

40. Исследуя зависимость тока, протекающего через некоторый электрический элемент, от приложенного к нему напряжения, ученик Вася получил изображенный на рис. 17 график. Какая тепловая мощность будет выделяться на этом элементе, если его подключить к источнику постоянного напряжения 5В? Как изменится эта мощность, если к источнику подключить последовательно два таких элемента? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

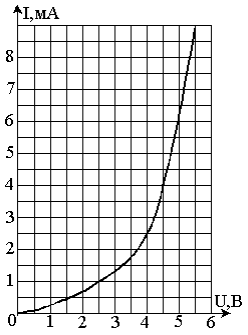


Рис. 17

41. Найдите ЭДС и внутреннее сопротивление сложного источника с бесконечным числом звеньев (см. рис. 18). ЭДС и внутреннее сопротивление каждого отдельного элемента равны соответственно $\mathcal{E}$ и R.

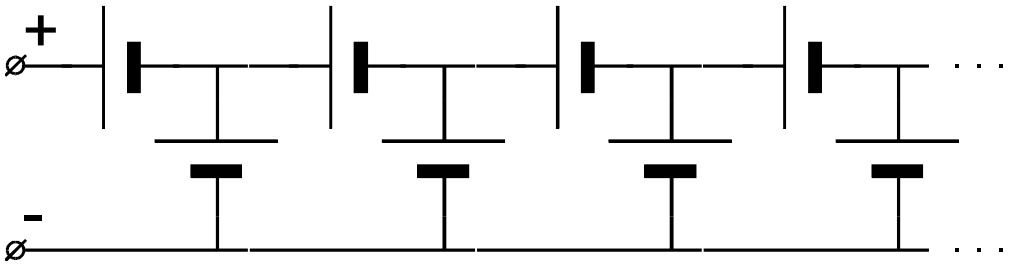


Рис. 18

42. Имеется цепь, состоящая из источника постоянного тока напряжением U, сопротивления R, конденсатора C и неоновой лампы N (см. рис. 19). Неоновая лампа обладает следующими свойствами: она загорается, когда напряжение на ней больше, чем некоторое значение U_1 ($U_1<U$), и гаснет, когда напряжение на ней меньше некоторого значения U_2 ($U_2<U_1$). Сопротивление горящей лампы равно R_0 ($R_0 << R$), сопротивление потухшей лампы бесконечно велико. Рассчитайте среднеквадратичное значение тока, протекающего через лампу за время её горения, если между двумя последовательными моментами ее зажигания и погасания проходит время τ.

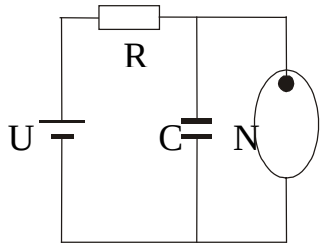


Рис. 19

43. На стеклянный стержень, покрытый непроводящей смазкой, надета заряженная бусинка с зарядом q. В пространстве создано постоянное во времени электрическое поле, у которого параллельная стержню состав-

ляющая напряженности зависит от координаты вдоль стержня по закону $E=E_0\sin(kx)$, где E_0 и k – постоянные. Частице толчком сообщают некоторую скорость вдоль стержня. Вследствие потерь на вязкое трение частица остановится. В каких точках можно обнаружить остановившуюся частицу?

44. Исследуется сила взаимодействия металлического шара и точечной положительно заряженной частицы, находящейся на постоянном расстоянии от шара. Когда на шар поместили некоторый положительный заряд, то оказалось, что шар и частица притягиваются с силой f_1,а когда заряд удвоили – с силой f_2. Какова будет сила взаимодействия, если заряд шара утроить?

45. Три среды с показателями преломления n_1, n_2 и n_3 ($n_1>n_2>n_3>1$) располагаются так, как показано на рисунке 20. Два луча идут параллельно друг другу, при этом луч 1 проходит только через среды I и III, а луч 2 – через среды II и III. Определите угол между этими лучами в среде III.

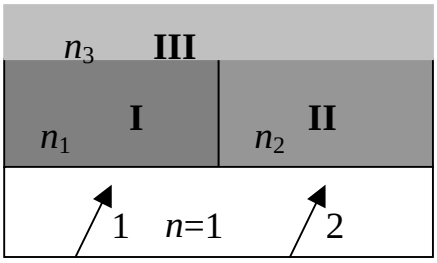


Рис. 20

46. Болельщик на стадионе делает снимок финиша забега на 100 метров, находясь сбоку от дорожки на расстоянии 10 м от фотографируемого спортсмена. Оцените выдержку, с которой он должен фотографировать, чтобы при печати с негатива фотоснимка размером 10×15 см он получился резким. Размеры кадра фотопленки 24×36 мм, расстояние от объектива до фотопленки 30 мм, разрешающая способность используемой фотопленки 120 лин/мм. Известно, что глаз способен различить два объекта, угол между направлениями на которые составляет одну угловую минуту, а снимок рассматривается с расстояния наилучшего зрения 25 см.

47. Трюмо в комнате Знайки состоит из трех одинаковых зеркал, два из которых закреплены под углом 45° к третьему (см. рис. 21). От времени центральное зеркало испортилось и перестало отражать свет. Сколько своих изображений сможет увидеть Знайка, если он находится на оси симметрии трюмо на расстоянии a от цен-

Рис. 21

трального зеркала? Постройте все изображения Знайки в зеркалах трюмо. Длина каждого зеркала l, высота больше роста Знайки.

48. Идеальная собирающая тонкая линза с фокусным расстоянием F имеет форму диска диаметра d и заключена в оправу с внешним диаметром D. За линзой на расстоянии F от ее оптического центра перпендикулярно главной оптической оси расположен плоский экран достаточно большой площади. Перед линзой на ее главной оптической оси размещен точечный источник света. Получите формулу зависимости площади тени, отбрасываемой оправой на экран, от расстояния l между источником и оптическим центром линзы, если $F<l<\infty$. Постройте график этой зависимости.

49. В центре собирающей линзы с фокусным расстоянием F_1 вырезано круговое отверстие и в него вставлена собирающая линза с меньшим фокусным расстоянием F_2 (см. рис. 22). Постройте изображение предмета, показанного на рисунке, в этой “двойной” линзе.

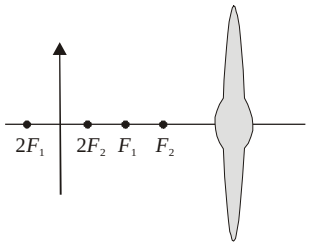


Рис. 22

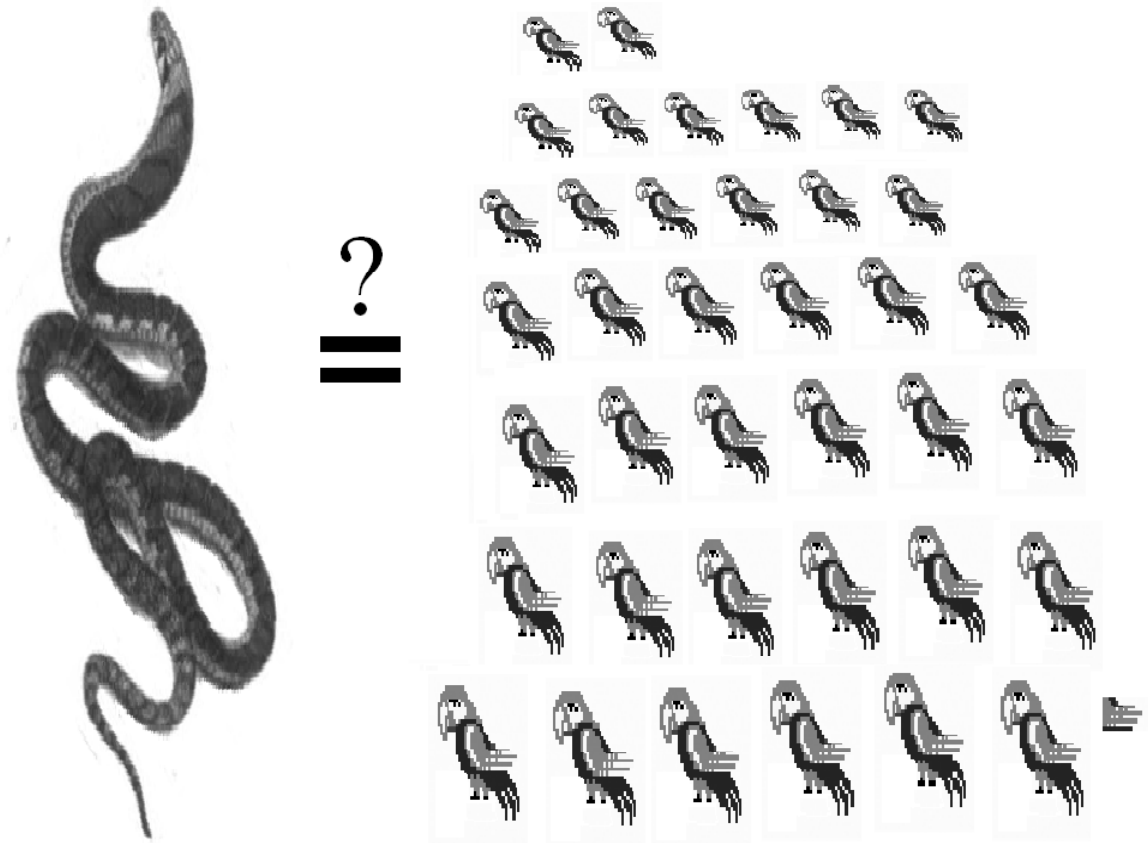
50. В пустом аквариуме установлены изготовленная из стекла двояковыпуклая линза и предмет, находящийся в ее фокусе. Аквариум заполняют водой. Постройте (качественно) изображение предмета в линзе.

Часть II.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

…А в попугаях я все-таки длиннее!…

Из мультфильма



1. Ответ: 150 верст/час.

Решение: Из условия задачи вытекает, что в тот момент, когда первый заяц достиг опушки леса (точка *B*), Бесенок должен был находиться в точке *A* (см. рис. 23). При этом в прямоугольном треугольнике *AOB* угол *AOC* равен 60°, так как *OC*=*BC*=*OA*=*R*. Заяц, пробежав путь *CB*=*R* со скоростью *v*, затратил время *t*=*R*/*v*. За такое же время Бесенок проделал путь по дуге *CA* окружности.

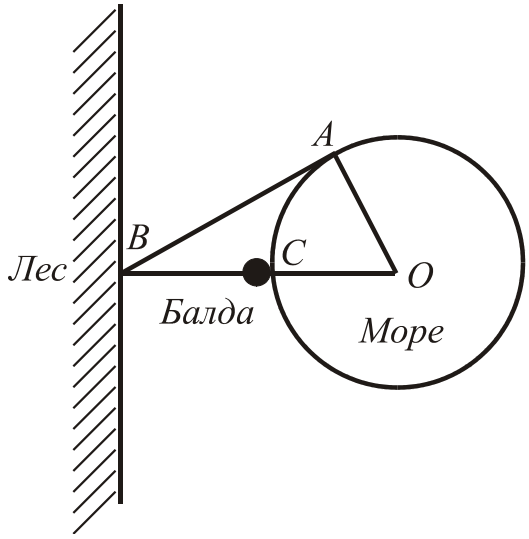


Рис. 23

Длина пути Бесенка

$$S_Б = R(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{5\pi R}{3}$$

Так как времена бега зайца и Бесенка одинаковы, то

$$\frac{R}{v} = \frac{5\pi R}{3v_Б}.$$

Отсюда находим скорость Бесенка:

$$v_Б = v\frac{5\pi}{3} = 50\pi \approx 150 \text{ верст/ч.}$$

2. Ответ: чтобы успеть на автобус, Знайка должен выйти в 7.47, а чтобы успеть на трамвай – в 7.45.

Решение: У Знайки есть два варианта поведения: идти к остановке А или к остановке В, соответственно, он должен выбрать тот из них, который требует меньше времени, чтобы попасть на остановку В.

Пусть Знайка хочет успеть на автобус. Если он пойдет на остановку В, то он должен выйти за (2*км*–0,8*км*)/4,8*км*/*ч*=15 *мин*. до 8 часов. Если же он пойдет на остановку А, то чтобы успеть на автобус, ему необходимо прийти туда не к 8.00, а на 2*км*/40*км*/*ч*=3 *мин* раньше, поэтому ему надо выйти за 0,8*км*/4,8*км*/*ч*+3*мин*=13 *мин* до 8.00. Поэтому в этом случае для Знайки выгоднее идти к остановке А и нужно выйти из дома в 7.47.

Аналогичные рассуждения для случая, когда Знайка хочет успеть на трамвай, приводят к следующему результату: если Знайка идет к остановке В, то он должен выйти за 15 минут до 8.00, а если к А – за 16 минут до 8.00, поэтому Знайка должен выйти в 7.45 и пойти к остановке В.

3. Ответ: за $t=\frac{l}{U}+\frac{L}{V}$ при $\frac{l}{L}<\frac{1-U/V}{2}$ и за $t=\frac{L-l}{U}$ при $\frac{l}{L}>\frac{1-U/V}{2}$.

Решение: Если Гена идет к остановке *A*, то он должен выйти за время $t=l/U$ до прибытия автобуса на эту остановку, т.е. за время $t_1=\frac{l}{U}+\frac{L}{V}$ до прибытия автобуса на остановку *B*. Если он идет к остановке *B*, то ему надо выйти за время $t_2=\frac{L-l}{U}$.

Для ответа на вопрос задачи нужно выбрать минимальное время из t_1 и t_2.

Пусть $t_1>t_2$, т.е. $\frac{l}{U}+\frac{L}{V}>\frac{L-l}{U}$. Решая это неравенство, находим: $\frac{l}{L}>\frac{1-U/V}{2}$.

При значениях параметров, удовлетворяющих этому условию, Гена должен идти ко второй остановке (*B*), в противном случае – к первой (*A*).

4. Ответ: 38,4 попугая. В 5 раз.

Решение: Пусть L – длина Удава, v – скорость бегущей Мартышки, u – скорость ползущего Удава, t_1 – время забега Мартышки до головы Удава, t_2 – время забега в обратном направлении. Тогда в системе отсчета, связанной с ползущим Удавом, для прямого и обратного забега Мартышки можно составить следующие два уравнения:

$$(v-u)=\frac{L}{t_1},(v+u)=\frac{L}{t_2}.$$

Аналогичные уравнения, записанные в системе отсчета, связанной с пальмой, будут иметь вид:

$$v=\frac{x_1}{t_1},v=\frac{x_1-x_2}{t_2}.$$

Здесь x_1=48 и x_2=16 – координаты первого и второго бананов, выраженные в Попугаях. Решая эту систему четырех уравнений, получим, что L=38,4 попугая, v/u=5.

5. Ответ: $t=\begin{cases} \dfrac{2LT}{LT-v} & при \quad 0 \le v < \dfrac{L}{3T}, \\ 3T & при \quad \dfrac{L}{3T} \le v < \dfrac{L}{2T}, \\ nT, n \ge 4 & при \quad \dfrac{(n-3)L}{(n-2)T} \le v < \dfrac{(n-2)L}{(n-1)T}, \\ & \ldots \\ \infty & при \quad v \ge \dfrac{L}{T}. \end{cases}$

Решение: Решим данную задачу графическим способом.

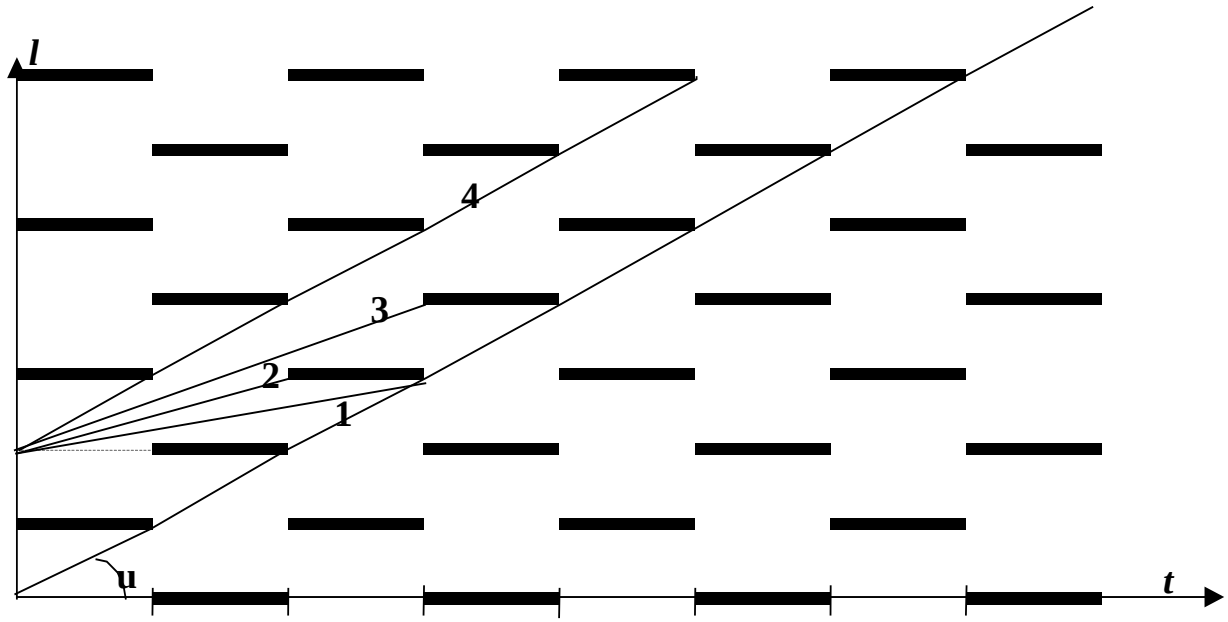


Рис. 24

На приведенной диаграмме (рис. 24) изображена “пространственно-временная картина дороги” (по горизонтальной оси отложено время, по вертикальной – расстояние). Жирным обозначены точки, соответствующие красному свету на светофоре в данной точке дороги в данный момент времени. Движение автомобиля изображается в виде прямой линии, тангенс угла наклона которой к оси времени равен его скорости. Если линия должна пересечь жирный отрезок (“закрытый светофор”), то она прерывается и возобновляется под тем же углом с правого конца данного отрезка (автомобиль остановился и дождался включения зеленого света). Пересечение двух изображающих линий соответствует встрече автомобилей.

Очевидно, что по условиям задачи “задний” автомобиль движется со скоростью $u=L/T$, поскольку это максимально возможная скорость, при которой изображающая линия не пересечет жирных отрезков (т.е. автомобиль

не останавливается на светофорах).

Для движения второго автомобиля можно рассмотреть несколько “пограничных” изображающих линий.

1) Линия 1.

Соответствующая скорость $v_1=L/3T$. При этом автомобиль подъедет к следующему светофору в тот момент, когда на нем загорается зеленый свет, и в этот момент его и догонит “задний” автомобиль. При меньших скоростях обгон произойдет еще раньше и его время очевидным образом определится как $t=2L/(u-v)=2LT/(L-vT)$.

2) Линия 2.

Соответствующая скорость $v_2=L/2T$. Обгон произойдет в точке $3L$ в момент времени $3T$, так как первый автомобиль будет вынужден остановиться на светофоре. Таким образом, для всех скоростей между линиями 1 и 2 $t=3T$.

Аналогично для скоростей между линиями 2 и 3 (соответствующая скорость $v=2L/3T$) $t=4T$, и т.д.

3) Линия 4, соответствующая скорость $v=L/T=u$.

При скоростях больше, чем данная, второй автомобиль не сможет догнать первый, поскольку средняя скорость их обоих будет равна u.

6. Ответ: 30 мс, 15 см.

Решение: Причина расхождения получаемых значений скорости с истинными заключается в том, что при описанном методе наблюдения невозможно определить, на какой именно угол повернулось колесо за время τ: φ или $\varphi+2\pi n$, где n – целое число. Соответственно правильная (правда, неоднозначная) формула для угловой скорости колеса имеет вид $\omega=(\varphi+2\pi n)/\tau$, тогда скорость движения автомобиля определяется по формуле $v=\omega r=r(\varphi+2\pi n)/\tau$, где r – радиус колеса. При использовании предложенного проф. Выбегалло метода фактически предполагается $n=0$, соответственно правильные результаты он дает лишь при небольших скоростях, для которых это действительно так.

“Граничное” значение скорости соответствует $\varphi=2\pi$, из чего получаем $\tau=\pi d/v\approx 30$ мс. Из аналогичного соотношения для заднего колеса получаем значение его диаметра 15 см.

7. Ответ: $d = d_0 / \sqrt{\cos\alpha}$

Решение: Расход воды (объем воды, проходящий через поперечное сечение струи в единицу времени) одинаков в любом месте струи (условие непрерывности). Поэтому можно записать: $\pi v_0 d_0^2/4 = \pi v d^2/4$, где d – искомый диаметр, v_0 и v – скорость струи при выходе из шланга и в верхней точке траектории соответственно.

Поскольку движение любого малого объема воды после выхода из шланга является движением тела, брошенного под углом к горизонту, то скорость струи в верхней точке траектории определится как $v = v_0\cos\alpha$. Тогда искомый диаметр $d = d_0 / \sqrt{\cos\alpha}$.

8. Ответ: $\omega(t) = \dfrac{v}{\sqrt{R^2 + \dfrac{vtd}{\pi}}}$

Решение: Для того, чтобы линейная скорость ленты была постоянна, необходимо, чтобы в любой момент времени выполнялось равенство $\omega r = v$. Явный вид зависимости радиуса катушки с намотанной лентой от времени проще всего найти из следующих соображений: пусть через время t после начала движения радиус катушки с намотанной лентой равен r. Тогда на катушке намотана лента объемом $V = \pi(r^2 - R^2)l$, где l – ширина ленты. В то же время этот же объем ленты прошел мимо считывающей головки со скоростью v, поэтому $V = vtld$. Приравнивая эти выражения, находим $r(t) = \sqrt{R^2 + \dfrac{vtd}{\pi}}$. Тогда угловая скорость вращения $\omega(t) = \dfrac{v}{\sqrt{R^2 + \dfrac{vtd}{\pi}}}$.

9. Ответ: 0,8 г/см^3; 0,75 г/см^3.

Решение: Введем обозначения L – длина ареометра, x – высота, на которую он выступает над поверхностью жидкости (см. рис. 25), S – площадь его поперечного сечения. Тогда при погружении в однородную жидкость плотностью ρ имеет место очевидное соотношение $M = \rho S(L - x)$, из которого получаем градировочное соотношение $x_\rho = L - \dfrac{M}{\rho S}$. Оно

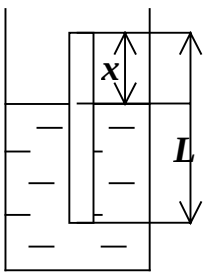


рис. 25

фактически определяет, на каком расстоянии от верхнего края ареометра должна быть нанесена отметка, соответствующая плотности ρ.

Из этой формулы следует, что в чистый бензин ареометр погрузился бы на $L–x$=13 см, следовательно, при толщине слоя $2h$>13см ареометр плавает только в бензине и, естественно, показывает его плотность. Если же толщина слоя h<13 см, то часть ареометра погружена в воду (см. рис. 26). В этом случае условие плавания имеет вид $M=S(\rho_б h+\rho_в(L–h–x_1))$, откуда имеем

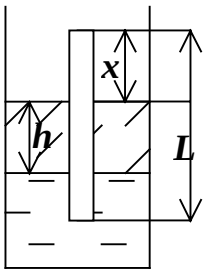


Рис. 26

$$x_1 = L - h(1 - \frac{\rho_б}{\rho_в}) - \frac{M}{\rho S}.$$

В то же время в соответствии с градировочным соотношением ареометр показывает такую плотность ρ_x, что $x_1 = L - \frac{M}{\rho_x S}$. Приравнивая эти выражения, получаем $\rho_x = \rho_в \frac{M}{hS(\rho_в - \rho_б) + M}$. Подставляя числовые значения, имеем ρ_x=0,8 г/см^3.

Заметим, что при удвоенной толщине слоя бензина эта формула дает очевидно неправильный ответ 0,66 г/см^3.

10. Ответ: на 3,1 см ближе к свинцовому.

Решение: Запишем условие равновесия системы в воде (т.к. стержень опирается на острие серединой, то моменты действующих на него сил тяжести и Архимеда можно не учитывать):

$$\left(m_1 g - F_{A_1}\right)\frac{l}{2} = \left(m_2 g - F_{A_2}\right)\frac{l}{2}.$$

Здесь $m_1 = \rho_1 V_1, m_2 = \rho_2 V_2, F_{A_1} = \rho V_1 g, F_{A_2} = \rho V_2 g$. Следовательно, условие равновесия в воде можно представить в виде: $(\rho_1 - \rho)V_1 g = (\rho_2 - \rho)V_2 g$. Отсюда получаем, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_2 - \rho}$.

Для сохранения равновесия системы в воздухе передвинем алюминиевый шарик ближе к свинцовому на некоторое расстояние x. Тогда условие равновесия в воздухе запишется в виде: $m_1 g \frac{l}{2} = m_2 g\left(\frac{l}{2} - x\right)$.

Так как $m_1 = \rho_1 V_1, m_2 = \rho_2 V_2$, то $\rho_1 V_1 \frac{l}{2} = \rho_2 V_2 \left(\frac{l}{2} - x \right)$ и для соотношения объемов шариков получим: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1 l}{2\rho_2 \left(\frac{l}{2} - x \right)}$.

Из записанных соотношений находим $\frac{\rho_1 l}{2\rho_2 \left(\frac{l}{2} - x \right)} = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_2 - \rho}$, откуда получаем $x = \frac{l}{2} \frac{\rho(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2(\rho_1 - \rho)} \approx 3{,}1$ см.

11. Ответ: длина кита должна быть не менее 175000 км.

Решение: Обозначим длину Кита L, тогда его радиус $r=L/20$. В соответствии со представлениями того времени предположим, что Кит и Земля находятся в однородном гравитационном поле (как объяснить возникновение этого поля, в рамках данной задачи нас не интересует). Тогда существование описанной конструкции возможно, если суммарная масса Кита и Земли не больше массы воды в объеме Кита, что можно выразить следующим условием:

$$\frac{2}{3}\pi\rho_3 R_3^3 + 20r\pi r^2 \rho_K \le 20r\pi r^2 \rho_B,$$

откуда несложно получить $r \ge \sqrt[3]{\frac{\rho_3}{30(\rho_B - \rho_K)}} R_3 \approx 8700$ км. Тогда длина Кита должна быть не меньше 174000 км. В действительности эта оценка несколько занижена, т.к. для устойчивого плавания необходимо, чтобы Кит не полностью погружался в воду.

12. Ответ: примерно 10 м.

Решение: вначале проанализируем задачу в общем виде. Пусть картофелины имеют форму шаров радиуса R и плотности ρ, а ширина снимаемой шкурки равна h. Тогда длина шкурки, снимаемой с одной картофелины, определится как $L_0 = 4\pi R^2/h$, а с одного килограмма картофеля как $L = \frac{1}{(4/3)\rho\pi R^3} L_0 = \frac{3}{\rho R h}$. (Здесь плотность нужно брать в кг/м^3, а R и h – в метрах, тогда длина также получится в метрах.)

Таким образом, видно, что длина снимаемой с 1 кг картофеля шкурки обратно пропорциональна радиусу (т.е. характерному размеру) картофелин, поэтому килограмм мелкой картошки очистить дольше, чем крупной. Из этой же формулы следует, что в случае очень мелкой картошки длина снимаемой шкурки должна становиться бесконечно большой[1].

Для оценки длины шкурки можно использовать следующие численные значения: $\rho \approx 1000$ кг/м^3, $R \approx 3$ см, $h \approx 1$ см. Тогда получаем $L \approx 10$ м.

13. Ответ: вся вода вытечет за время $t_2^2/2t_1$ при $t_2 < 2t_1$ и за время t_2 в противном случае.

Решение: Пусть высота бака равна H, его площадь основания – S, а площадь отверстия – S_0. Свяжем эти параметры с данными условия. Известно, что скорость истечения воды из отверстия под действием столба высотой h определяется формулой $V = \sqrt{2gh}$. Тогда объемная скорость истечения воды из бака определяется формулой

$$u_2 = \frac{dV}{dt} = S\frac{dh}{dt} S_0\sqrt{2gh}\,.$$

Поскольку за время t_2 вытекла вся вода, имеем следующее равенство:

$$\frac{S}{S_0}\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int_0^{t_2} \sqrt{2g}\,dt\,, \qquad (1)$$

откуда получаем следующее соотношение:

$$\frac{S}{S_0} 2\sqrt{H} = \sqrt{2gt_2} \qquad (2)$$

Пусть u_1 – объемная скорость истечения воды из крана, тогда имеет место следующее очевидное соотношение:

$$SH = u_1 t_1 \qquad (3).$$

Очевидно, что за время, много большее t_1 и t_2, в системе установится равновесие, т.е. бак наполнится водой до того уровня, при котором скорость истечения воды через отверстие будет равна скорости u_1, т.е. $S_0\sqrt{2gh} = u_1$.

---

[1] Следует заметить, что при очень мелкой картошке приведенный анализ становится некорректным, поскольку, во-первых, ширина снимаемой шкурки начинает зависеть от радиуса картошки, а во-вторых, становится сравнимой с радиусом картофеля толщина шкурки, что существенно влияет на процесс очистки.

Из этого равенства с использованием (2) и (3) находим : $h_0 = H\dfrac{t_2^2}{4t_1^2}$.

Теперь несложно определить время t_3 , за которое выльется вода, налитая в бак до уровня h_0: $\dfrac{S}{S_0}\int\limits_H^0 \dfrac{dh}{\sqrt{h}} = \int\limits_0^{t_3} \sqrt{2g}\,dt$.

Откуда находим ответ: $t_3 = \dfrac{t_2^2}{2t_1}$. Очевидно, что все приведенные рассуждения справедливы лишь в том случае, когда бак с отверстием не наполняется полностью, то есть $h_0<H$. В противном случае бак полностью наполняется и искомое время равно t_2.

14. Решение: Прежде всего отметим, что если $f>T$, то рвется нижняя нить. Обсудим теперь, что будет происходить, если $f<T$. В этом случае сила натяжения нижней нити равна f (нить невесома). В рамках предложенной в условии модели мы приходим к ситуации, когда имеется груз на пружинке, который потянули вниз с силой f. Такая система будет совершать колебания около положения равновесия по гармоническому закону. По такому же закону будет изменяться и сила натяжения около среднего положения $f_{ср}=f+Mg$ с амплитудой f. Нить порвется, если максимальная сила натяжения $f+f_{ср}=2f+Mg$ превысит T, и не порвется при выполнении противоположного условия. Различные возможные случаи иллюстрируются рис. 27.

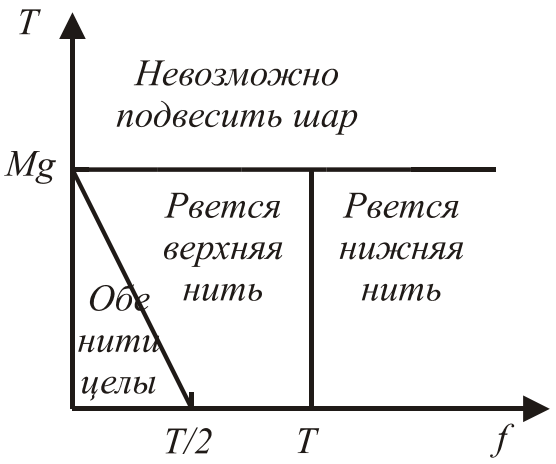


Рис. 27

15. Ответ: см. рис. 28.

Решение: Согласно 2 закону Ньютона

$F_x = m \cdot a_x$.

По определению ускорения:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x \cdot \frac{\Delta v_x}{\Delta x}.$$

Поэтому $F_x = mv_x \cdot \dfrac{\Delta v_x}{\Delta x}$. Из графика видно, что $\dfrac{\Delta v_x}{\Delta x} = const$. Поэтому график зависимости F_x от x также будет линейным (см. рис. 29). Остается произвести пересчет координат в моменты времени. По определению скорости имеем:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

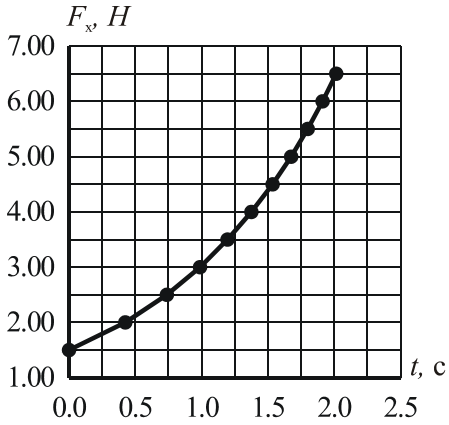


Рис. 28

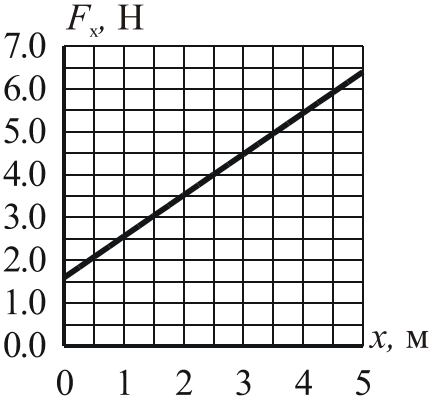


Рис. 29

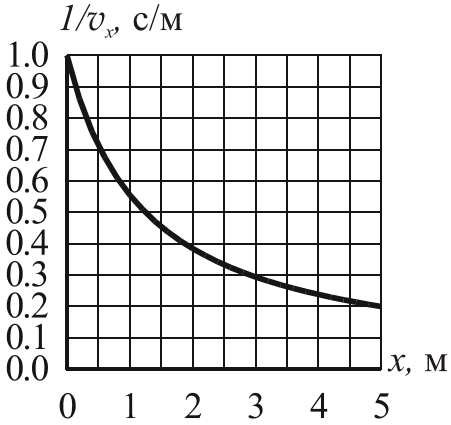


Рис. 30.

Отсюда $\Delta t = \dfrac{1}{v_x}\Delta x$, то есть промежуток времени численно равен площади под графиком зависимости обратной скорости от координаты x. Такой график представлен на рис. 30. Пользуясь этим графиком, подсчитывая площади узких трапеций, находим промежутки времени, затраченные на прохождение каждого отрезка $\Delta x = 0{,}5$ м. Результаты заносим в таблицу и по ее двум последним колонкам строим требуемый график зависимости силы от времени (рис. 28).

Таблица:

x, м	$1/v_x$ м/с	Δt, с.	t, с.	F_x, Н
0	1,0	–	0	1,5
0,5	0,7	$\frac{1}{2}(1+0{,}7)\cdot 0{,}5 = 0{,}425$	0,425	2

1,0	0,55	$\frac{1}{2}(0{,}7+0{,}55)\cdot 0{,}5=0{,}3125$	0,7375	2,5
1,5	0,45	$\frac{1}{2}(0{,}55+0{,}45)\cdot 0{,}5=0{,}25$	0,9875	3
2,0	0,38	$\frac{1}{2}(0{,}45+0{,}38)\cdot 0{,}5=0{,}2075$	1,195	3,5
2,5	0,34	$\frac{1}{2}(0{,}38+0{,}34)\cdot 0{,}5=0{,}18$	1,375	4
3,0	0,30	$\frac{1}{2}(0{,}34+0{,}30)\cdot 0{,}5=0{,}16$	1,535	4,5
3,5	0,26	$\frac{1}{2}(0{,}30+0{,}26)\cdot 0{,}5=0{,}14$	1,675	5
4,0	0,24	$\frac{1}{2}(0{,}26+0{,}24)\cdot 0{,}5=0{,}125$	1,800	5,5
4,5	0,21	$\frac{1}{2}(0{,}24+0{,}21)\cdot 0{,}5=0{,}1125$	1,9125	6
5,0	0,20	$\frac{1}{2}(0{,}21+0{,}20)\cdot 0{,}5=0{,}1025$	2,015	7,4

16. Ответ: Верной является первая формула $y=\frac{4Fl^3}{Eab^3}$.

Решение: Формулы 2, 3 и 6 не подходят из соображений размерности. Формула 5 дает явно неправильную зависимость смещения y от длины балки *l*: смещение не может убывать с ростом *l* при фиксированной нагрузке. Формула 4 дает симметричную зависимость от *a* и *b*, что неверно – балку, повернутую на ребро, деформировать значительно труднее. Таким образом, остается формула 1.

17.Ответ: $\beta_n=\sqrt{k^n\beta_0^2+(1-k^n)\alpha^2}$.

Решение: Пусть длина нити *l*, масса шарика *m*. Тогда потенциальная энергия шарика при максимальном отклонении влево составляет $U_{лев.}=2mgl\sin^2(\beta/2)$, а вправо $U_{прав.}=2mgl\sin^2(\alpha/2)$, или, учитывая малость углов α и β, $U_{лев.}=mg\beta^2/2$, $U_{пр.}=mg\alpha^2/2$. Тогда после первого удара о стенку шарик будет иметь энергию $U_1=kmgl(\beta^2-\alpha^2)/2$ и после этого шарик отклонится влево на такой угол β_1, что $mgl\beta_1^2/2=U_1$, т.е. $\beta_1^2=k\beta_0^2+(1-k)\alpha^2$.

Проводя аналогичные рассуждения для второго, третьего и последующих

ударов, несложно получить общую формулу: $\beta_n = \sqrt{k^n \beta_0^2 + (1-k^n)\alpha^2}$. Видно, что $\beta_n \to \alpha$ при $n \to \infty$ за исключением случая абсолютно упругого удара (k=1), при котором β_n=α при всех n.

18. Решение: Сразу очевидны три качественно различных ситуации: когда нить закручивается вокруг нижнего гвоздя, при этом грузик движется по окружности; когда грузик совершает колебания и нить все время остается натянутой и "промежуточный" вариант.

Нить все время остается натянутой, если отклонение грузика влево не превышает 90°. Тогда по закону сохранения энергии $mgL(1-\cos\alpha)<mgl$, откуда получаем условие $l/L>1-\cos\alpha$.

Для того, чтобы грузик закручивался вокруг нижнего гвоздя и нить все время оставалась натянутой, необходимо, чтобы сила натяжения нити в верхней точке траектории была больше нуля, т.е. $mv^2/l>mg$, тогда по закону сохранения энергии $mgL(1-\cos\alpha)>mgl/2+mgl$, откуда $l/L<2/5(1-\cos\alpha)$.

Промежуточный случай требует более подробного рассмотрения. Если грузик отклоняется вправо на угол, больший 90°, но его энергии не хватает для движения по окружности, то в некоторый момент натяжение нити становится равным нулю. Пусть в этот момент угол между нитью и горизонталью составляет β (см. рис. 31). Из условия равенства нулю силы натяжения нити получим $mv^2/l=mg\sin\beta$. В то же время по закону сохранения энергии $mv^2/2=mgL(1-\cos\alpha)-mgl(1+\sin\beta)$, откуда получим выражение для угла β: $\sin\beta=2/3(L/l(1-\cos\alpha)-1)$.

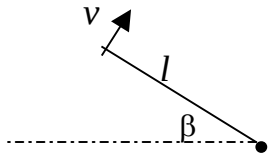


Рис. 31

Дальнейшее движение грузика в течение некоторого времени можно рассматривать как полет тела, брошенного под углом к горизонту. Возможны две качественно различных ситуации: когда грузик проходит над нижним гвоздем (в этом случае нить наматывается на гвоздь, но траектория грузика не является окружностью), и когда грузик проходит ниже этого гвоздя, при этом нить не наматывается, а грузик совершает сложные движения. Найдем условие, разграничивающее эти ситуации.

Пусть грузик оказывается на одной вертикали с гвоздем через время t. Тогда $v\sin\beta\, t=l\cos\beta$, откуда $t=l\cos\beta/v\sin\beta$. Грузик пройдет выше гвоздя и нить намотается на гвоздь, если $l\sin\beta+v\cos\beta t-gt^2/2>0$. Подставив t и прове-

дя некоторые преобразования с использованием ранее полученных соотношений, получим следующее неравенство: $l/L < 2/(2+\sqrt{3})(1-\cos\alpha)$.

Таким образом, окончательно имеем 4 различных ситуации: I – колебания по дуге окружности; II – сложное движение без закручивания нити вокруг гвоздя; III – нить закручивается вокруг гвоздя, шарик движется по сложной кривой; IV – шарик движется по спирали, нить закручивается вокруг гвоздя. Соответствующие им области представлены на рис. 32

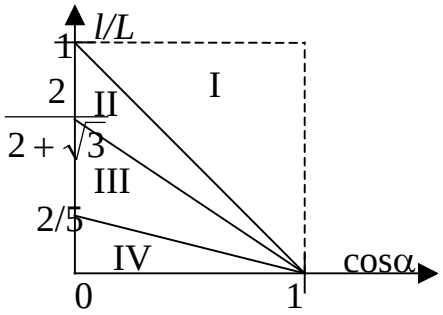


Рис. 32

19. Ответ: см. рис. 33.

Решение: Брусок либо скользит по доске, либо нет. В первом случае приложенная сила F больше, чем максимальная сила трения покоя между бруском и доской $F_{тр.1}=\mu_1 mg$, во втором – меньше. Если брусок скользит, то по III закону Ньютона на доску в направлении силы F действует сила трения скольжения $F_{тр.1}$, если нет – то сила трения покоя, равная F**.** Если эта сила меньше, чем максимальная сила трения покоя между доской и поверхностью $F_{тр.1}=\mu_2(m+M)g$, то доска скользит по поверхности, если нет, то доска покоится. Таким образом, возможны четыре различные ситуации:

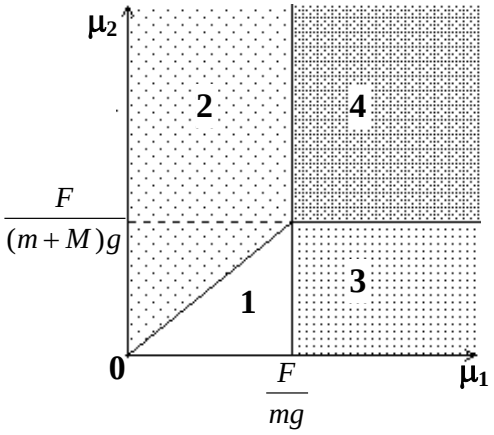


Рис. 33

1) Брусок и доска скользят относительно друг друга.

В этом случае $F>\mu_1 mg$ и $\mu_1 mg>\mu_2(m+M)g$, т.е. $\mu_1 < \dfrac{F}{mg}$, $\mu_2 < \mu_1 \dfrac{m}{m+M}$.

2) Брусок скользит по доске, доска покоится относительно поверхности.

При этом $F>\mu_1 mg$ и $\mu_1 mg<\mu_2(m+M)g$, т.е. $\mu_1 < \dfrac{F}{mg}$, $\mu_2 > \mu_1 \dfrac{m}{m+M}$.

3) Брусок неподвижен относительно доски, доска скользит

Это соответствует $F<\mu_1 mg$ и $F>\mu_2(m+M)g$, или $\mu_1 > \dfrac{F}{mg}$, $\mu_2 < \mu_1 \dfrac{m}{m+M}$.

4) Брусок и доска неподвижны.

$F< \mu_1 mg$ и $F< \mu_2(m+M)g$, или $\mu_1 > \frac{F}{mg}$, $\mu_2 > \mu_1 \frac{m}{m+M}$.

Соответствующие этим ситуациям области на плоскости параметров приведены на рис. 33.

20. Ответ: коэффициент трения равен 0,22.

Решение: Известно, что если угол охвата легкой нитью блока равен φ, то отношение сил натяжения на ее концах выражается формулой $T_1/T_2=e^{\mu\varphi}$, где μ– коэффициент трения нити по блоку.

В состоянии покоя силы натяжения равны силам тяжести, действующим на подвешенные к концам грузы. Тогда можно записать $e^{\mu\varphi}=2$, откуда $\mu=(\ln 2)/\pi\approx 0{,}22$.

21. Ответ: $4A/gl$.

Решение: Минимальная работа, необходимая для раскрытия книги посередине, равна работе подъема половины массы книги на высоту $l/2$: $A=\frac{m}{2}g\frac{l}{2}$. Отсюда находим массу книги: $m=4A/gl$.

22. Ответ: $2{,}5\cdot 10^9$ Дж, $6\cdot 10^{-7}$ К, не изменится.

Решение: Примем за нулевой уровень воды во впадине волны, тогда уравнение поверхности воды в возмущенном состоянии имеет вид $y(x)=a(1+\sin\frac{2\pi x}{\lambda})$.

Избыточная потенциальная энергия, которой обладает вода на одном периоде волны, определяется выражением, которое несложно вычислить[2]:

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}g\rho L\int_0^{\lambda} y^2(x)dx - \frac{1}{2}g\rho al\lambda = \frac{1}{4}g\rho L\lambda a^2,$$

где ρ – плотность воды.

Поскольку длина и ширина озера намного больше длины волны, то можно считать, что на длине озера укладывается целое число длин волн, равное

[2] Вычисление определенного интеграла можно заменить вычислением площади под графиком, аппроксимировав профиль волны прямоугольниками, треугольниками или другими простыми фигурами. Получаемые при этом результаты совпадают с точным по порядку величины.

L/λ. Тогда несложно подсчитать полную избыточную потенциальную энергию $\Delta E_p = \frac{1}{4} g\rho L^2 a^2 = 2{,}5 \cdot 10^9$ Дж.

Будем считать, что вся избыточная потенциальная энергия при затухании волн пойдет на нагрев воды. Тогда изменение температуры можно определить по формуле: $\Delta T = \frac{\Delta E_p}{cm} = \frac{g\rho L^2 a^2}{cg\rho L^2 h} = \frac{ga^2}{4ch} \approx 6 \cdot 10^{-7}$ К.

Поскольку окончательный результат не зависит от длины и ширины озера, для озера с бóльшими сторонами изменение температуры будет таким же.

23. Ответ: а)1м/с^2, б) 6м/с^2.

Решение: На автомобиль действуют сила тяжести $M\boldsymbol{g}$, приложенная к его центру масс, и силы реакции опоры на передние и задние колеса $\boldsymbol{N_1}$ и $\boldsymbol{N_2}$ соответственно (рис. 34). Кроме того, на задние колеса действует сила трения $\boldsymbol{F_{тр}}$, являющаяся *силой трения покоя* и направленная *по направлению движения* автомобиля (это становится очевидным, если заметить, что нижняя точка колеса неподвижна относительно земли, а действующий на колесо со стороны двигателя момент сил стремится сдвинуть ее против направления движения автомобиля). Именно эта сила трения покоя и движет автомобиль вперед. В то же время на переднее колесо не действуют ни сила трения покоя, ни сила трения скольжения, т.к. оно катится без проскальзывания и не приводится во вращение мотором.

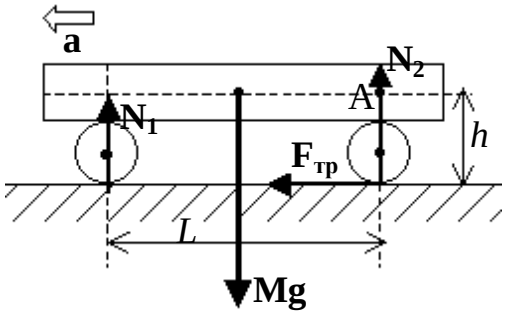


Рис. 34

Записав второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную и горизонтальную ось и уравнение моментов относительно т.А, являющейся точкой пересечения проведенной через центр тяжести горизонтали и проведенной через ось заднего колеса вертикали (см. рис. 34), получим систему уравнений, описывающую движение автомобиля:

$$\begin{cases} F_{mp} = Ma_{\max} \\ N_1 + N_2 = Mg \\ N_1 L + F_{mp} h = Mg\dfrac{L}{2} \end{cases} . \qquad (1)$$

Учитывая, что сила трения покоя $F_{тр} \le \mu N_2$, можно прийти к системе неравенств, ограничивающих значение ускорения:

$$\begin{cases} a \le \mu \dfrac{N_2}{M} \\ a \le (\dfrac{N_2}{M} - \dfrac{g}{2}) \dfrac{L}{h} \end{cases}. \qquad (2)$$

При нарушении первого условия системы (2) задние колеса начнут проскальзывать, а при нарушении второго условия нарушится третье уравнение системы (1), суммарный момент сил $\boldsymbol{N_1}$ и $\boldsymbol{F_{тр}}$ превысит момент силы тяжести и автомобиль опрокинется назад.

Поскольку правые части неравенств системы (2) прямо пропорциональны силе N_2, то максимальное ускорение достигается при ее максимальном значении. Очевидно, что оно равно значению силы тяжести, тогда (2) принимает вид

$$\begin{cases} a \le \mu g \\ a \le \dfrac{L}{2h} g \end{cases}.$$

Непосредственным вычислением несложно убедиться, что при μ=0,1 существенным оказывается первое неравенство, а при μ=0,7 – второе.

24. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Решение: Воспользуемся законом сохранения механической энергии при гармонических колебаниях. Пусть в некоторый момент времени масса m смещена из своего первоначального положения к центру квадрата на $x=OH$ (см. рис. 35) и имеет скорость $\dot{x}$. При этом две смежные с H вершины смещены на расстояния Δy, которые находим из теоремы Пифагора: $a^2 = (\dfrac{a}{\sqrt{2}} + \Delta y)^2 + (\dfrac{a}{\sqrt{2}} - x)^2$.

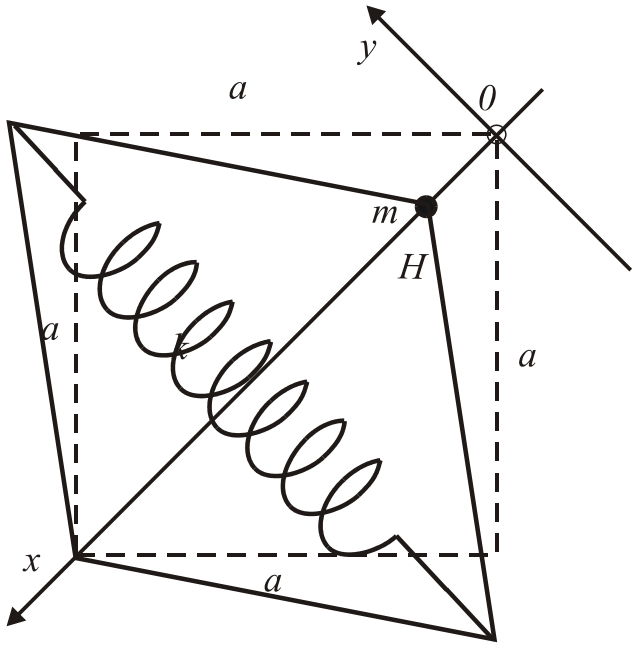


Рис. 35

Проводя тождественные преобразования и пренебрегая величиной $(\Delta y)^2$ как бесконечно малой второго порядка, получим $\Delta y = x$. Следовательно, в этот момент времени пружина деформирована на величину $\Delta l = 2\Delta y = 2x$. Полная механическая энергия системы складывается из кинетической энергии точки *m* и потенциальной энергии упругой деформации пружины:

$$W = \frac{m(\dot{x})^2}{2} + \frac{k(2x)^2}{2} = \frac{m(\dot{x})^2}{2} + 2kx^2 = const.$$

Беря производную от *W*, получим:

$$\frac{m2\dot{x}\ddot{x}}{2} + 4kx\dot{x} = 0,$$

или, после очевидных преобразований:

$$\ddot{x} + \frac{4k}{m}x = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний, круговая частота которых удовлетворяет условию $\omega_0^2 = \frac{4k}{m}$. Поэтому искомый период определится как

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

25. Ответ: $l\sqrt{\frac{2mg}{kL}}$

Решение: При малом отклонении от положения равновесия на маятник действуют силы тяжести, сила реакции опоры со стороны стержня и силы упругости со стороны пружин. Поскольку отклонения малы, то можно считать, что пружины остаются горизонтальными.

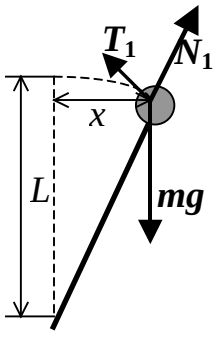


Рис. 36.
(Вид сбоку)

Равнодействующую сил тяжести и реакции стержня несложно найти аналогично стандартной задаче о математическом маятнике: $T_1 = mgx/L$, (см. рис. 36), обратите внимание на отсутствие знака “–” перед смещением *x*.

Определим равнодействующую сил упругости со стороны пружин (см. рис. 37). Удлинение каждой из пружин $\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l}$. Тогда из очевидных геометрических соображений с учетом малости отклонения имеем $T_2 = -\frac{kx^3}{l^2}$.

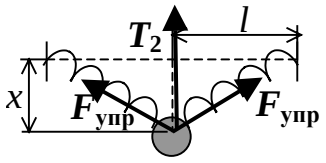


Рис. 37.
(Вид сверху)

Считая, что силы $\boldsymbol{T_1}$ и $\boldsymbol{T_2}$ действуют вдоль одной прямой, запишем выражение для силы, возникающей при малом отклонении от положения равновесия:

$$F(x) = mg\frac{x}{L} - k\frac{x^3}{l^2}.$$

При очень малых значениях x преобладает первое слагаемое и сила стремится увеличить отклонение, поэтому центральное положение x=0 является *неустойчивым*. При дальнейшем увеличении отклонения второе слагаемое возрастает быстрее, чем первое, и при $x_0 = l\sqrt{\frac{mg}{kL}}$ сила становится равной нулю. Это еще одно положение равновесия маятника, причем оно *устойчиво*. Это становится очевидным из графика зависимости потенциальной энергии маятника от отклонения (рис. 38), аналитический вид которого несложно получить интегрированием выражения для силы (константу интегрирования, равную значению потенциальной энергии при x=0, положим равной нулю):

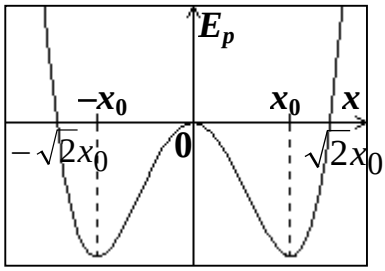


Рис. 38

$$E_p = -mg\frac{x^2}{2L} + k\frac{x^4}{4l^2}$$

Поскольку система консервативна, маятник пройдет положение равновесия и продолжит отклоняться до тех пор, пока его потенциальная энергия не достигнет первоначального значения. Несложно видеть, что это произойдет при $x = \sqrt{2}x_0$. Затем процесс повторится в обратном порядке.

26. См. рис. 39.

Решение: Пусть шарик отклонился вправо от положения равновесия так, что угол между прямой, соединяющей его центр O с центром сферы O_1, и вертикалью ($\angle AO_1B$ на рис. 40) равен φ, φ<<1. Очевидно, что положение равновесия будет устойчивым, если вертикаль, проведенная из центра тяжести шарика C, пройдет левее точки касания шарика со сферой B, и неустойчивым в противном случае.

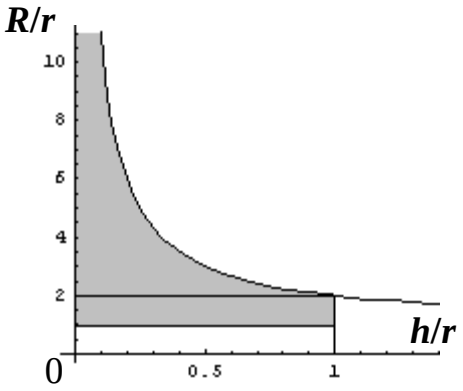


Рис. 39

Пусть D – точка поверхности шарика, касавшаяся сферы в состоянии равновесия. Поскольку шарик катится по сфере без проскальзывания, дуги AB и DB равны, поэтому $R\varphi = r\varphi'$ (где φ' – величина ∠DOB). Подсчитаем расстояние от центра шара до т. F – точки пересечения прямой OC и вертикали, проведенной через т. B.

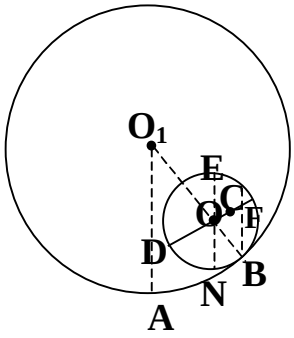


Рис. 40

Несложно видеть, что ∠OFB=∠EOC=∠DOB–∠DON==φ'–φ=φ(R/r–1). Из треугольника OFB по Т. синусов r/OF=[sinφ(R/r–1)]/sinφ. Учитывая, что при малых углах sinφ≈φ, условие устойчивости равновесия OF>h можно переписать в виде $r/h > R/r - 1$. На плоскости (h/r, R/r) это условие задает область, ограниченную координатными осями и гиперболой $R/r = 1/(h/r+1)$, при этом необходимо учесть естественные условия $h/r \le 1$, $R/r \ge 1$ (см. рис. 39).

27. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(r-h)^2}{h(r+R)-r^2}\dfrac{r}{g}}$.

Решение: Т.к. сфера легкая, а груз тяжелый, то можно считать, что вся масса модели сосредоточена в точке размещения груза C, являющейся ее центром тяжести.

Пусть модель отклонилась от положения равновесия так, что соединяющая центры модели и полусферы прямая образует малый угол φ с вертикалью (угол OO_1E на рис. 41). Введем следующие обозначения: O – центр

модели, O_1 – центр полусферы, A – точка касания модели и полусферы, B – точка поверхности модели, касающаяся полусферы в положении равновесия; величину угла AOC обозначим φ'.

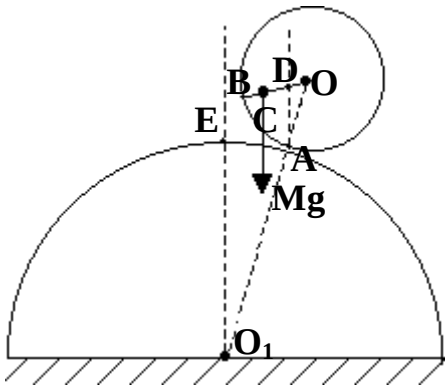


Рис. 41

В данном положении на модель действуют силы тяжести и реакции опоры со стороны полусферы. В любой момент времени движение модели можно представить как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку опоры A перпендикулярно плоскости рисунка. Поскольку сила реакции опоры приложена в этой точке, ее момент равен нулю и при отклонении от положения равновесия на модель действует только момент силы тяжести относительно т. A (точнее, оси, проходящей через т. A перпендикулярно плоскости рисунка). В зависимости от геометрии системы (а именно, проходит ли проведенная из т. C вертикаль слева или справа от т. A) он либо возвращает систему в первоначальное положение, либо уводит еще дальше от него. Очевидно, что колебания возможны только в первом случае.

Поскольку при движении модели ось, проходящая через т. A перпендикулярно плоскости рисунка, движется поступательно и остается параллельной оси, проходящей через центр масс, то уравнение движения относительно нее можно записывать в обычном виде: $M = I\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Пусть D – точка пересечения проведенной из т. A вертикали с радиусом OB. Тогда момент силы тяжести относительно рассматриваемой оси

$$M = mg\cdot \mathrm{CD}\cdot \sin\angle \mathrm{ADO} = mg\cdot \mathrm{CD}\cdot \sin(\varphi+\varphi')$$

В силу отсутствия проскальзывания при движении модели длина дуги EA равна длине дуги BA, т.е. $R\varphi = r\varphi'$. С учетом этого соотношения, малости угла φ и Т. синусов для треугольника ODA $\dfrac{OD}{\sin\varphi} = \dfrac{OA}{\sin(\varphi+\varphi')}$ можно найти $OD = \dfrac{r^2}{r+R}$. Тогда выражение для момента силы тяжести примет вид $M = mg\varphi(h(1+\dfrac{R}{r}) - r)$.

Момент инерции модели относительно той же оси определится как

$$I=mCA^2=m(r^2+h^2-2rh\cos\varphi')\approx m(r-h)^2$$

(здесь учтено, что косинус малого угла равен 1 с точностью до второго порядка малости), и окончательно уравнение движения модели примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{h(1+\frac{R}{r})-r}{(r-h)^2}g\varphi=0.$$

Несложно видеть, что полученное уравнение описывает гармонические колебания с периодом $T=2\pi\sqrt{\frac{(r-h)^2}{h(r+R)-r^2}\frac{r}{g}}$.

Обратим внимание, что знаменатель полученной формулы обращается в ноль при $h=r^2/(r+R)$ и становится меньше нуля при меньших значениях h. Несложно сообразить, что такая ситуация соответствует потере рассматриваемым положением равновесия устойчивости.

28.Ответ: см. рис. 42

Решение: Очевидно, что могут реализовываться следующие состояния:

1) в сосуде останется только лед. Соответствующее условие имеет вид $c_в MT+\lambda M<c_л mt$

2) в сосуде останется только вода. Условие имеет вид $c_в MT>c_л mt+\lambda M$

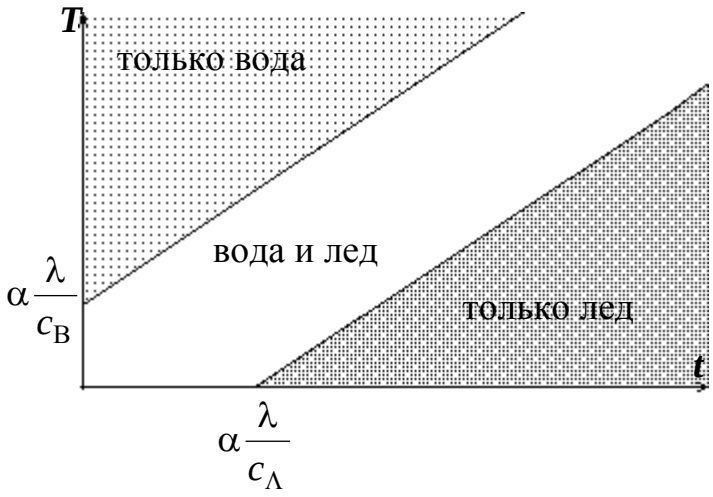


Рис. 42

3) промежуточная ситуация: есть одновременно и лед, и вода при нулевой температуре.

Поделив эти неравенства на M, заметим, что задача имеет три физических параметра: T, t и $\alpha=m/M$.

Соответствующие области на плоскости параметров (T, t) изображены на рис. 42, при этом прямые, являющиеся границами областей, параллельны, а их угловой коэффициент равен α.

29. Ответ: 7,6°С.

Решение: Сила натяжения нити станет равной нулю, когда часть льда растает и уменьшится выталкивающая сила. Из условия равновесия системы в исходном состоянии находим массу m шарика:

$$T + (M_0 + m)g - F_A = 0,$$

$$F_A = (V_1 + V_2)\rho g,$$

$$V_1 = \frac{M_0}{\rho_1}, V_2 = \frac{m}{\rho_2},$$

$$T + (M_0 + m)g - \left(\frac{M_0}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2}\right)\rho g = 0,$$

$$mg\left(1 - \frac{\rho}{\rho_2}\right) = M_0 g\left(\frac{\rho}{\rho_1} - 1\right) - T,$$

$$m = \frac{M_0\left(\frac{\rho}{\rho_1} - 1\right) - \frac{T}{g}}{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_2}\right)} = 4{,}9\text{ г}.$$

Сила натяжения нити $T = \rho\left(\frac{M_0}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2}\right)g - (M_0 + m)g$ обратится в ноль, если масса льда уменьшится до некоторого значения M_1, удовлетворяющего условию: $(M_1 + m) = \rho\left(\frac{M_1}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2}\right)$, откуда

$$M_1 = \frac{m\left(1 - \frac{\rho}{\rho_2}\right)}{\left(\frac{\rho}{\rho_1} - 1\right)} = 0{,}0278\text{ кг}.$$

Значит, для исчезновения натяжения силы натяжения должно быть расплавлено $\Delta M = M_0 - M_1 = 0{,}1 - 0{,}0278 = 0{,}072$ кг льда. Так как он уже находится при температуре плавления для этого необходимо $Q_1 = \Delta M\lambda = 0{,}238 \cdot 10^5$ Дж. Эта энергия будет получена за счет охлаждения воды. В итоге в системе установится тепловое равновесие при температуре t_2, определяемой из уравнения теплового баланса:

$$cm_0(t_0 - t_2) = Q_1 + c(M_0 - M_1)(t_2 - 0°C).$$

Отсюда находим $t_2 = \dfrac{cm_0t_0 - Q_1}{c[m_0 + \Delta M]} \cong 7{,}6°C.$

30. Ответ: 19%.

Решение: Пусть интервал времени, через который производится измерение температуры, равен T, тогда, в соответствии с записями в журнале, температура стала равной t_1=–0,5°С через 9T, а t_2=–4°С – через 10T. В течение первого интервала времени вся имевшаяся в мокром снеге вода замерзла. Тогда, считая мощность отъема тепла в морозильной камере постоянной, запишем уравнения теплового баланса:

От начала эксперимента до 10-го измерения: $9TP=\varphi m\lambda+cm|t_1|$;

от 10-го до 11-го измерения: $TP=cm\ (|t_2|-|t_1|)$, где P – мощность отъема тепла, m – масса снега, φ – массовая доля воды в мокром снеге. Из полученных уравнений несложно найти

$$\varphi=c(9|t_2|-10|t_1|)/\lambda$$

Подставляя численные значения, получаем φ≈0,19.

31. Ответ: 132 В.

Решение: Очевидно, что ток, идущий между двумя горизонтальными пластинами, нагревает воду. Рассмотрим небольшой объем воды размерами $a\times d\times$dl. В этом объеме выделяется тепловая мощность $P = \dfrac{U^2}{R} = \dfrac{U^2 a \cdot dl}{\gamma d}$.

Пренебрегая теплопроводностью воды, можно найти энергию, полученную этим объемом за все время его нахождения в нагревателе: $Q = \dfrac{U^2 a \cdot dl}{\gamma d} \cdot \dfrac{L}{v}$.

Тогда температура этого объема увеличилась на $\Delta T = \dfrac{U^2 L}{\gamma\rho d^2 v}$, где v – скорость течения воды, связанная с ее объемным расходом $k = \Delta V / \Delta t$ очевидным соотношением $k=dav$. Необходимое напряжение выразится формулой $U = \sqrt{\dfrac{k\rho\gamma cd\Delta T}{La}}$,подстановка в которую численных значений дает U≈132 В.

32. Ответ: двухлитровая банка нагреется до 98,6°C, литровая закипит за 30 минут.

Решение: Поскольку температура воды в банке не поднимается выше T_3=80°C несмотря на работающий кипятильник, то вся его мощность уходит на потери в окружающую среду. Будем считать, что потери происходят через теплообмен с воздухом (крышка закрыта, потерями на излучение можно пренебречь). Мощность потока тепла через некоторую поверхность пропорциональна ее площади и разности температур поверхности и окружающей среды, поэтому можно записать

$$P_0=kS_3(T_3-T_0), \qquad (1)$$

где k – некоторый постоянный коэффициент, S_3 – площадь поверхности трехлитровой банки.

Аналогичные (1) уравнения можно записать для двухлитровой и литровой банок. Учитывая, что объем пропорционален кубу линейных размеров, а площадь поверхности – квадрату, несложно сообразить, что площадь поверхности двухлитровой банки в $(3/2)^{2/3}\approx1{,}3104$ раза меньше площади поверхности трехлитровой банки, а литровой – в $3^{2/3}\approx2{,}0803$ раза. Тогда, сравнивая соответствующие уравнения с (1), получим, что температура, при которой наступает динамическое равновесие, составляет $T_2\approx98{,}6$°C для двухлитровой банки и $T_1\approx114{,}8$°C. Поэтому двухлитровую банку нагреть до кипения не удастся, а литровая банка вскипит.

Чтобы оценить время, за которое литровая банка закипит, рассмотрим более подробно процесс нагрева: в любой момент времени поступающее от кипятильника тепло идет на нагрев воды и теплообмен с окружающей средой:

$$P_0\,\mathrm{d}t=cm\mathrm{d}T+kS(T-T_0). \qquad (2)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим выражение для времени нагрева

$$t=\frac{cm}{kS}\ln\frac{P_0}{P_0-kS(100°C-T_0)}$$

Выражая величину kS из (1) и учитывая найденный ранее коэффициент $3^{2/3}$, получим $t\approx1790$°C$\approx$30мин.

33. Ответ: за 30 суток.

Решение: Считаем, что процесс происходит квазистатически и температура воды со временем не меняется. Тогда масса воды *dm*, испарившаяся за очень малый промежуток времени *dt*, при постоянных температуре и влажности воздуха и отсутствии ветра (аквариум стоит в комнате) зависит только от площади поверхности воды:

$$dm=\alpha S dt,$$

где α – некоторый коэффициент. Изменение уровня воды *dh* связано с *dm* очевидным соотношением

$$dm=\rho S dh,$$

где ρ – плотность жидкости. Поэтому

$$dh=(\alpha/\rho)dt.$$

Поскольку условия испарения постоянны, то изменение уровня воды линейно зависит от времени и не зависит от других параметров, в частности, от формы сосуда. Тогда если за двое суток уровень понизился на 1 см, то вся вода испарится за 15·2суток=30 суток.

34. Ответ: $2p_0V_0$.

Исходный цикл разбивается на два: 1–2–3–4–5–1 и 1–2–6–5–1. Работа в первом равна $2p_0V_0$, а во втором — нулю. Поэтому суммарная работа есть $2p_0V_0$.

35. Ответ: 450 К, 43%.

Решение: Из уравнений адиабат 2–3 и 4–1: $p_2V_2^\gamma = p_3V_3^\gamma$, $p_4V_4^\gamma = p_1V_1^\gamma$, получаем:

$$\frac{p_3}{p_4}=\frac{p_2}{p_1}. \qquad (1)$$

Согласно уравнению Клапейрона для изохорных участков 1–2 и 3–4 имеем:

$$\frac{p_2}{T_2}=\frac{p_1}{T_1},\Rightarrow\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1}, \qquad (2)$$

$$\frac{p_3}{T_3}=\frac{p_4}{T_4},\Rightarrow\frac{p_3}{p_4}=\frac{T_3}{T_4}. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), найдем температуру T_3:

$$T_3 = T_4 \frac{T_2}{T_1} = 300 \frac{786}{524} = 450\,\text{К}.$$

Для определения к. п.д. двигателя нужно вычислить работу A, совершаемую газом за цикл, и количество теплоты Q_1, получаемое газом от нагревателя.

$$A = A_{23} + A_{41} = -(\Delta U_{23} + \Delta U_{41}) = -\frac{3}{2}\nu R[(T_3 - T_2) + (T_1 - T_4)] =$$

$$= \frac{3}{2}\nu R[(T_2 - T_3) + (T_4 - T_1)].$$

Газ нагревается, получая энергию от нагревателя на участке 1–2. Поэтому

$$Q_1 = \Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1).$$

К.п.д. двигателя

$$\eta = \frac{\frac{3}{2}\nu R[(T_2 - T_3) + (T_4 - T_1)]}{\frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)} = \frac{(T_2 - T_1) - (T_3 - T_4)}{(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1} \approx 0{,}43.$$

36. Ответ: $C = \dfrac{\dfrac{11F}{p_0 S + Mg} + 5}{\dfrac{6F}{p_0 S + Mg} + 2} R$

Решение: Т.к. охлаждение газа проводится медленно, то движение поршня вниз происходит квазистатически и сумма сил, действующих на него, равна нулю. Это условие запишется в виде $p_1S=p_0S+Mg-F$ (см. рис. 43). Здесь p_1 – давление газа под поршнем. Очевидно, что давление p_1 будет под поршнем и в момент начала нагревания.

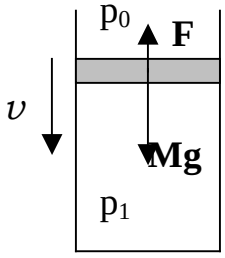


Рис. 43

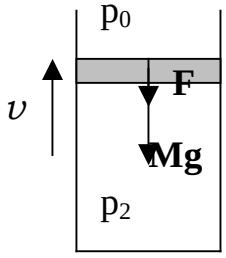


Рис. 44

Для того, чтобы поршень двигался вверх, необходимо, чтобы давление под ним удовлетворяло соотношению $p_2S=p_0S+Mg+F$(см. рис. 44). Таким образом, процесс нагревания состоит из двух: изохорного нагревания, при котором давление увеличивается от p_1 до p_2, и изобарного нагревания, при котором объем увеличивается в два раза.

Пусть температура газа перед началом нагревания T_1. Тогда по закону Гей-Люссака изменение температуры в изохорном процессе составит

$$\Delta T_1=T_1((p_0S+Mg+F)/(p_0S+Mg–F)–1)=2FT_1/(p_0S+Mg–F),$$

а газ получит количество теплоты $Q_1=C_V\Delta T_1$.

Т.к. в изобарном процессе объем газа увеличился вдвое, то и температура также увеличилась вдвое, поэтому изменение температуры в изобарном процессе

$$\Delta T_2=T_1+\Delta T_1= T_1((p_0S+Mg+F)/(p_0S+Mg–F),$$

а газ получил количество теплоты $Q_2=C_p\Delta T_2$.

По определению, средняя теплоемкость газа в процессе нагревания равна $C=(Q_1+Q_2)/(\Delta T_1+\Delta T_2)$. Подставив найденные значения и проведя необходимые преобразования, а также учтя соотношение Майера, получим

$$C=\frac{(3C_V+R)\dfrac{F}{p_0S+Mg}+C_V+R}{3\dfrac{F}{p_0S+Mg}+1}$$

Учитывая, что для идеального одноатомного газа $C_V=3R$, это соотношение можно упростить, придя к окончательному ответу.

37. Ответ: $c=(\frac{3}{2}R+C)\left(1+\frac{Mg+p_0S}{Mg+p_0S+F}\cdot\frac{R}{\frac{5}{2}R+C}\right)$

Решение: Процесс расширения начнется тогда, когда сила давления газа сможет сдвинуть поршень с места, т.е. $pS=Mg+F+p_0S$, где S – площадь поршня. Пусть скорость подвода тепла к системе в процессе нагрева равна q. Оно идет на увеличение внутренней энергии газа и совершение им работы по подъему поршня, а также на нагрев сосуда (т.к. процесс происходит медленно, то кинетической энергией, приобретаемой поршнем, можно пренебречь). Запишем уравнение теплового баланса для бесконечно малых изменений температуры, учитывая, что работа по подъему поршня складывается из трех частей: работы по увеличению его потенциальной энергии ($Mg\mathrm{d}l$), работы против силы внешнего давления ($p_0S\mathrm{d}l$) и работы против силы трения ($F\mathrm{d}l$): $q\mathrm{d}t=c_V\mathrm{d}t+(Mg+p_0S+F)\mathrm{d}l+C\mathrm{d}T$, где $\mathrm{d}T$ и $\mathrm{d}l$ – изменение температуры и смещение поршня за бесконечно малое время $\mathrm{d}t$.

Работа против сил трения, в свою очередь, рассеивается в виде тепла, т.е. идет на нагревание рассматриваемой системы, что можно записать следующим образом: $F\mathrm{d}l=c_V\mathrm{d}T'+C\mathrm{d}T'+(Mg+p_0S)\mathrm{d}l'+F\mathrm{d}l'$, где $\mathrm{d}l'$ и $\mathrm{d}T'$ – "дополнительные" смещение поршня и изменение температуры. Связь между ними можно получить из уравнения состояния одного моля идеального газа: $pS\mathrm{d}l'=R\mathrm{d}T'$. Тогда

$$dT' = dT\,\frac{FR}{pS}\,\frac{1}{c_V + C + \dfrac{Mg + p_0S + F}{pS}R}.$$

Повторяя эти рассуждения, можно прийти к выводу, что общее повышение температуры $\mathrm{d}T_0$ от первоначального нагрева $q\mathrm{d}t$ определяется как сумма геометрической прогрессии с первым членом $\mathrm{d}T$ и знаменателем $\varphi = \dfrac{FR}{pS}\,\dfrac{1}{c_V + C + \dfrac{Mg + p_0S + F}{pS}R}$, т.е. $\mathrm{d}T_0=\mathrm{d}T/(1-\varphi)$. Тогда итоговое уравнение энергетического баланса за малое время $\mathrm{d}t$ запишется в виде: $q\mathrm{d}t=(c_V+C)\mathrm{d}T_0+(Mg+p_0S)\mathrm{d}l_0$, или $qdT = \dfrac{c_V + C + \dfrac{Mg + p_0S + F}{pS}R}{\varphi}dT_0$, откуда по определению теплоемкости после несложных преобразований, учитывая условия $Mg + F + p_0S = pS$ и $c_V = 3/2R$, получаем окончательный ответ.

38. Ответ: а) $T = 2\pi\sqrt{ml^2 / RT_0}$.

б) при уменьшении температуры колебаний нет, при увеличении период уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

в) при равных количествах воды и пара колебаний не будет, при равных количествах воздуха и пара период уменьшится в $\sqrt{3/2}$ раза.

Решение: а) Давление насыщенного пара, в отличие от давления идеального газа, зависит только от температуры. Поэтому при смещении перегородки давление в меньшей части останется неизменным ("лишний" пар сконденсируется в воду), а в большей части пар перестанет быть насыщенным (в этом случае его можно рассматривать как идеальный газ).

Пусть длина сосуда $2l$, а перегородка сместилась на малое расстояние x влево. Тогда слева от перегородки давление газа равно первоначальному $p_{\text{лев}}=p_0$, а давление справа определится по закону Бойля-Мариотта:

$p_{пр}(l+x)=p_0 l$. Тогда действующая на перегородку сила $F=(p_{лев}-p_{пр})S=$ $=p_0 x/(x+l)\approx p_0 Sx/l$, где S – площадь поперечного сечения сосуда. Записывая уравнение движения и применяя уравнение состояния идеального газа, получим период малых колебаний $T=2\pi\sqrt{ml^2/RT_0}$.

б) Если сосуд охладить, то давление пара станет больше давления насыщенного пара, и часть пара сконденсируется. Оставшийся пар попрежнему является насыщенным, однако теперь в сосуде присутствует также вода. Поэтому при смещении перегородки слева “лишний” пар сконденсируется, а справа при уменьшении давления часть воды испарится, поэтому давление как слева, так и справа останется равным давлению насыщенного пара при данной температуре (по крайней мере при настолько малых колебаниях, что воды справа хватит для компенсации падения давления). Поэтому при понижении температуры колебаний вообще не будет.

При увеличении температуры пар перестанет быть насыщенным, и к нему можно применять законы идеального газа (при столь малых колебаниях, что пар не становится насыщенным вследствие сжатия). Тогда аналогичными п.а) рассуждениями можно получить $T=2\pi\sqrt{ml^2/2RT_0}$.

в) Если в обеих частях сосуда находится, кроме пара, вода, то, проводя аналогичные предыдущему пункту рассуждения, можно убедиться, что колебаний не будет.

Если в обеих частях сосуда находятся равные количества воздуха и пара, то при смещении перегородки влево $p_{пара\ лев.}=p_{пара\ 0}$, $p_{возд.\ лев.}(l-x)=p_{возд.\ 0}l$, $p_{прав.}(l+x)=p_0 l$ (здесь $p_{прав.}$ – суммарное давление пара и воздуха). Тогда, учитывая закон Дальтона, $F=(p_{лев.}-p_{прав.})S=1{,}5p_0 Sx/l$. Тогда период колебаний $T=2\pi\sqrt{2ml^2/3RT_0}$.

39. Ответ: 156 В.

Решение: Для электронагревателя, работающего без зеркала, тепловая мощность, уходящая вправо, составляет половину потребляемой от сети, т.е. (с учетом закона Джоуля-Ленца): $P_0=\frac{1}{2}\frac{U_0^2}{R}$, где U_0 = 220 В.

После установки зеркала вправо будет уходить вся потребляемая мощность: $P_0 = \frac{U_x^2}{R}$, где U_x — новое рабочее напряжение. Разделив второе уравнение на первое, получим: $U_x = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 156$ В.

40. Ответ: 30мВт, уменьшится в 12 раз.

Решение: Непосредственно по графику несложно определить, что при подключении к источнику напряжением 5В через элемент течет ток 6мА, поэтому выделяющаяся на нем тепловая мощность определится по закону Джоуля-Ленца: $P_1=U_1I_1$=30мВт. Ответить на второй вопрос задачи немного сложнее.

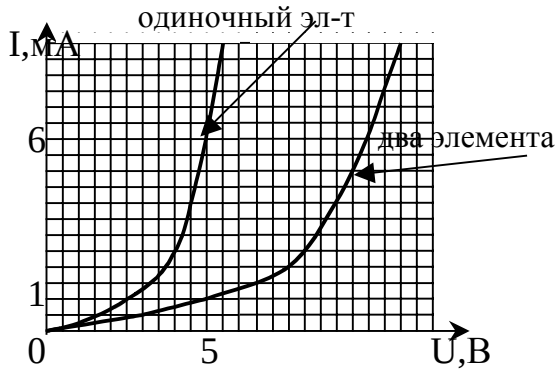


Рис. 45

Поскольку подключаемые последовательно элементы одинаковы, то и падение напряжения на них будет одинаково, так что на каждом из элементов будет падать напряжение 2,5В. Определим ток, текущий через элемент в этом случае. Для этого надо по имеющемуся графику построить график зависимости тока от напряжения (т.н. *вольт-амперную характеристику, или ВАХ*) для двух последовательно подключенных элементов.

Поскольку при последовательном подключении ток, текущий через элементы, одинаков, а напряжения на них складываются, то одному и тому же значению тока для двух последовательно соединенных элементов соответствует в два раза большее значение напряжения, чем для одного элемента. Поэтому ВАХ для двух последовательно соединенных элементов можно получить, умножая на 2 значения напряжения ВАХ одиночного элемента (см. рис. 45).

По полученной ВАХ несложно определить, что при приложенном напряжении 5В через элементы течет ток 1мА, поэтому на одном элементе выделится тепловая мощность P_2=2,5В·1мА=2,5Вт, что в 12 раз меньше мощности, выделяющейся в первом случае.

Заметим, что если бы элемент был линейным, то мощность уменьшилась бы всего в 4 раза.

41. Задача приводится к простейшей схеме , представленной на рис. 46.
Для нее несложно получить:

$$\varepsilon_x = \left(5+\sqrt{5}\right)\varepsilon/2, R_x = \left(5+\sqrt{5}\right)R/2 .$$

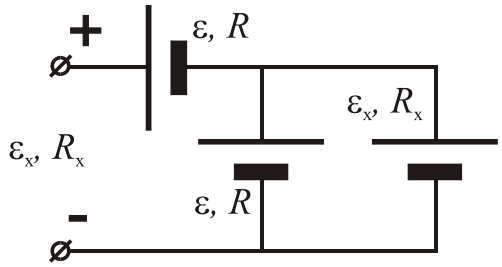


Рис. 46

42. Ответ: $I_{ср.кв.} = \sqrt{\frac{C}{2R\tau}(U_1 - U_2)}$.

Решение: Сразу после подключения источника питания в цепи течет ток зарядки конденсатора, лампа не горит и ее сопротивление равно бесконечности. При достижении напряжением на конденсаторе значения U_1 лампа загорается, ее сопротивление резко падает и через нее начинает разряжаться конденсатор. Так как $R<<R_0$, то процесс разрядки происходит намного быстрее процесса заряда конденсатора от источника питания, и зарядом, пришедшим от источника за это время, можно пренебречь. Когда напряжение на конденсаторе падает до значения U_2, лампа гаснет и опять начинается процесс зарядки конденсатора. Таким образом, в схеме происходит периодический процесс, поэтому достаточно определить величину среднеквадратичного значения тока за время горения лампы на одном периоде процесса. Определим эту величину из энергетических соображений. Перед началом разрядки конденсатора в нем была запасена энергия $W_1 = \frac{CU_1^2}{2}$, после окончания процесса разрядки энергия конденсатора стала равна $W_2 = \frac{CU_2^2}{2}$. Разность этих энергий выделилась в виде тепла при протекании тока через лампу, поэтому $\overline{P}\tau = W_1 - W_2$, где $\overline{P}$ – средняя мощность, выделяющаяся на лампе. По аналогии с выражением для мгновенной мощности можно записать выражение для средней мощности $\overline{P} = \overline{I^2}R$, где $\overline{I^2}$ – среднее значение квадрата тока через лампу. Тогда $\overline{I^2}R\tau = \frac{CU_1^2}{2} - \frac{CU_2^2}{2}$, откуда $I_{ср.кв.} = \sqrt{\overline{I^2}} = \sqrt{\frac{C}{2R\tau}(U_1 - U_2)}$.

43. Ответ: Бусинка остановится в точках: $x_0 = 2\pi(n + \frac{1}{2})$ при $q > 0$, $x_0 = 2\pi n$ при $q < 0$.

Решение: Так как в системе существует не сухое, а вязкое трение, то частица будет останавливаться только в точках, в которых напряженность электрического поля равна нулю $E = 0$. В рассматриваемой системе существуют такие точки двух типов, для одного (*а*) силовые линии поля входят в нее, а для другого (*б*) – выходят. Поэтому при анализе остановки бусинки необходимо установить, устойчивым или неустойчивым будет равновесие в точке остановки.

Для бусинки с зарядом $q > 0$ устойчивым будет положение в точках типа *а*, так при таком знаке заряда $F \uparrow\uparrow E$. Для бусинки с зарядом $q < 0$ устойчивым будет положение в точках типа *б*, так при таком знаке заряда $F \uparrow\downarrow\uparrow E$. Точкам типа *а* соответствуют точки, в которых функция $\sin x$ меняет знак с "+" на "-", следовательно $x_0 = 2\pi(n + \frac{1}{2})$. Точкам типа *б* соответствуют положения $x_0 = 2\pi n$, где n – целое число.

44. Ответ: $F_3=2F_2–F_1$.

Решение: Если шар не заряжен, то частица и шар притягиваются из-за наличия на поверхности шара индуцированного заряда. Пусть величина этой силы $F_{инд}$. Если теперь сообщить шару заряд q, $2q$, $3q$, то возникнет еще сила отталкивания. Она пропорциональна сообщенному заряду, потому что он распределится равномерно по поверхности шара. Введем для сил отталкивания обозначения F, $2F$, $3F$, соответственно. По принципу суперпозиции $F_1=F_{инд}–F$, $F_2=F_{инд}–2F$, $F_3=F_{инд}–3F$. Отсюда находим: $F_3=2F_2–F_1$. Отметим, что сила F_3 может быть как силой притяжения, так и силой отталкивания.

45. Ответ: лучи в среде III останутся параллельными.

Решение: В соответствии с законом преломления можно записать (см. рис. 47):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} = n_1, \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2} = n_2, \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_1} = \frac{n_3}{n_1}, \frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma_2} = \frac{n_3}{n_2}$$

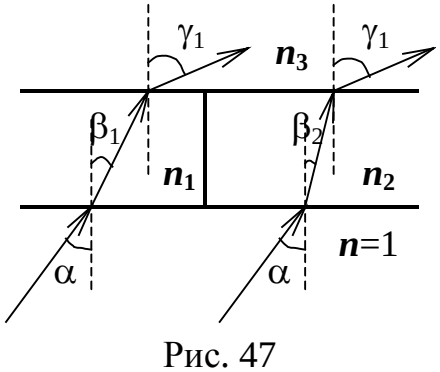


Рис. 47

Отсюда следует $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1} = n_3 = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_2}$, т.е. $\gamma_1=\gamma_2$.

46. Ответ: 1/2000 с.

Решение: Т.к. спортсмен движется, то за время срабатывания затвора фотоаппарата он успевает сместиться, и каждая точка тела спортсмена отображается на фотопленке и, соответственно, отпечатке снимка в виде пятна.

Если снимок рассматривать с расстояния наилучшего зрения 25 см, то для того, чтобы снимок казался резким, размер пятна должен быть меньше, чем 25см·1/60/57 рад≈0,07 мм.

Т.к. коэффициент увеличения при печати фотоснимка с негатива составляет 10см/24мм≈4,16, то на фотопленке размер пятна не должен превышать Δ=0,07/4,16≈0,017 мм. Заметим, что это больше размера зерна фотопленки 1/120мм, так что получить снимок требуемого качества возможно.

Построив ход лучей в фотообъективе, несложно убедиться, что если L – расстояние от объекта до фотообъектива, а d – от объектива до фотопленки, то при скорости спортсмена v и выдержке τ размер пятна определяется по формуле

$$\Delta/d=v\tau/L.$$

Подставляя найденные ранее и данные значения и учитывая, что скорость бегуна на 100 метров составляет примерно 10 м/с, получаем

$$\tau=(0{,}017\text{мм}\cdot 10\text{ м})/(30\text{ мм}\cdot 10\text{м/с}) \approx 6\cdot 10^{-4}\text{ с}\approx 1/2000\text{ с}.$$

47. Ответ: при $a > \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$ существует три изображения, в противном случае – 2, все они мнимые, при $l\frac{\sqrt{2}}{2} < a < l(\sqrt{2}-\frac{1}{2})$ Знайка видит 2 изображения, в противном случае – ни одного.

Решение: Введем следующие обозначения (см. рис. 48): ABCD – трюмо, S – положение Знайки, O – точка пересечения продолжений сторон трюмо AB и CD, F – основание перпендикуляра, опущенного из точки S на AB, E – середина BC. Несложно видеть, что изображения Знайки в зеркалах AB и CD существуют всегда (они обозначены S_1 и S_2 соответственно). По-

скольку $\angle OFS=\angle OFS_1$, то оба изображения S_1 и S_2 находятся на прямой, проведенной через т. O параллельно BC, и $S_1O=S_2O=SO$.

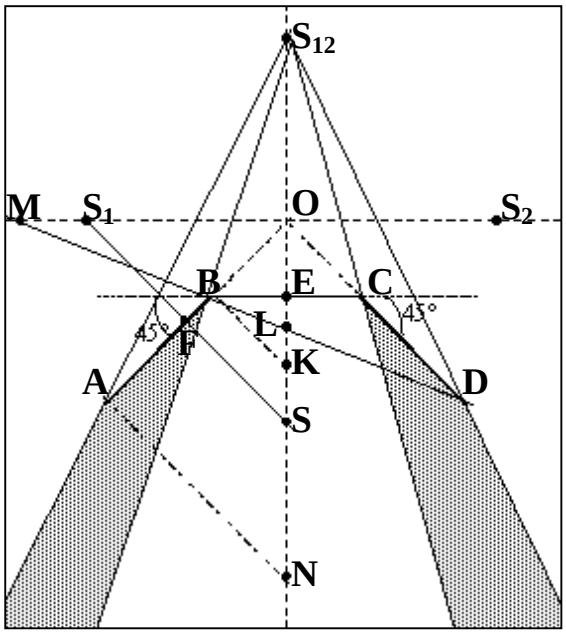


Рис. 48

В то же время увидеть изображение можно не всегда, а лишь когда отраженные от зеркала лучи попадут в точку, в которой находится наблюдатель. Так, свое изображение в зеркалах AB и CD Знайка сможет увидеть, только если точка F лежит на отрезке AB (а не на его продолжении). Это возможно, если он находится между точками K и N, перпендикуляры, опущенные из которых на AB, попадают в точки B и A соответственно. Несложные вычисления показывают, что $EK = l\sqrt{2}/2, EN = l(\sqrt{2}-1/2)$.

Кроме этих изображений, может образоваться изображение *мнимого предмета* S_1 в зеркале CD и, наоборот, мнимого предмета S_2 в зеркале AB. Физически это соответствует тому, что после отражения от зеркала AB луч сначала попадет на зеркало CD, а затем уйдет из системы. (Заметим, что более чем двукратных отражений в данной системе возникнуть не может). Оба полученных таким образом изображения располагаются в т. S_{12} ($OS=OS_{12}$), причем их ориентация также совпадает, поэтому фактически изображение одно.

Это изображение может образоваться, если луч, "исходящий" из т. S_1 и прошедший через отрезок AB, попадет на отрезок CD, т.е. если прямая BD пересечет прямую S_1S_2 на отрезке OS_1. Соответствующее условие проще всего записать в виде $OM>OS_1$. Несложно переписать это условие в виде $ES>(l/2)\mathrm{ctg}\angle CBD$. $\angle CBD=22{,}5°$, поэтому окончательно условие запишется в виде:

$$ES > \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}.$$

Даже если это изображение существует, Знайка не сможет его увидеть. Это можно пояснить следующим рассуждением: все лучи света, образующие

это изображение, должны казаться выходящими из точки S_{12}. В то же время они обязательно должны выходить из одного из боковых зеркал трюмо AB или CD, поскольку после отражения от них луч больше нигде не изменяет своего направления. Поэтому область, из которой видно изображение S_{12}, ограничена лучами $S_{12}A$ и $S_{12}B$ и лучами $S_{12}C$ и $S_{12}D$ (на рис. 48 эти области окрашены серым). Видно, что никакая точка оси симметрии зеркала не принадлежит этим областям. (Если же сойти с центральной оси, то это изображение действительно можно увидеть. Рекомендуется проделать соответствующий эксперимент).

48. Ответ: $S = \frac{\pi}{4}\left(\frac{(l+F)^2}{l^2}R^2 - \frac{F^2}{l^2}r^2\right)$.

Решение: Ход лучей в рассматриваемой системе приведен на рис. 49, области тени отмечены серым цветом. Тень от оправы линзы на экране имеет форму кольца, внешний диаметр которого определяется из простых геометрических соображений: $D_T = \frac{l+F}{l}D$. Внутренний диаметр теневого кольца определяется аналогичных образом $d_T = \frac{L-F}{L}d = (1-\frac{F}{L})d$, где L – расстояние от линзы до действительного изображения источника, которое определяется по формуле тонкой линзы: $\frac{1}{l}+\frac{1}{L}=\frac{1}{F} \Rightarrow L = \frac{Fl}{l-F}$. Тогда внутренний диаметр тени $d_T = \frac{F}{l}d$ и ее площадь определяется по формуле $S = \frac{\pi}{4}(D_T^2 - d_T^2) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{(l+F)^2}{l^2}D^2 - \frac{F^2}{l^2}d^2\right)$.

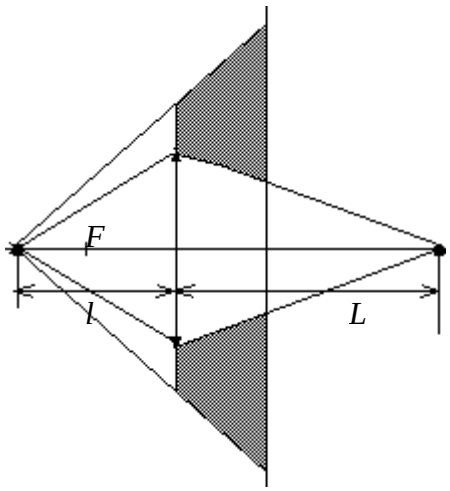


Рис. 49

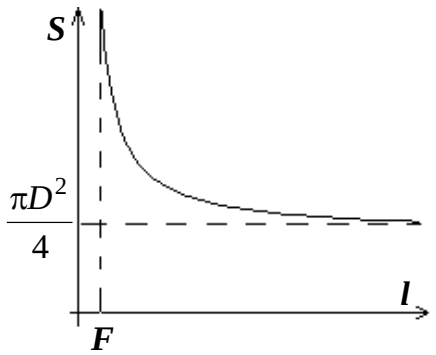


Рис. 50

График этой зависимости приведен на рис. 50. Заметим, что при увеличении расстояния l до бесконечности площадь тени стремится к значению $\pi D^2/4$, т.к. изображение источника находится на экране и имеет нулевую площадь.

49. Ответ: см. рис. 51.

Решение: Каждая линза дает изображение всего предмета, поэтому в данной системе возникнет два изображения, каждое из которых строится по обычным правилам.

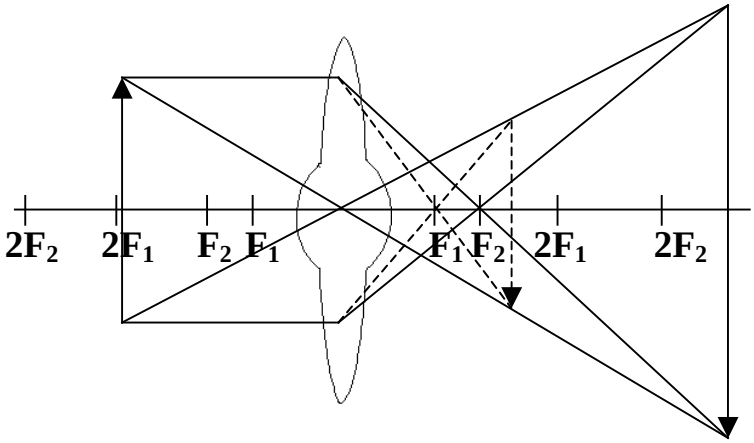


Рис. 51

50. Ответ: см. рис. 52. Получается прямое мнимое увеличенное изображение предмета.

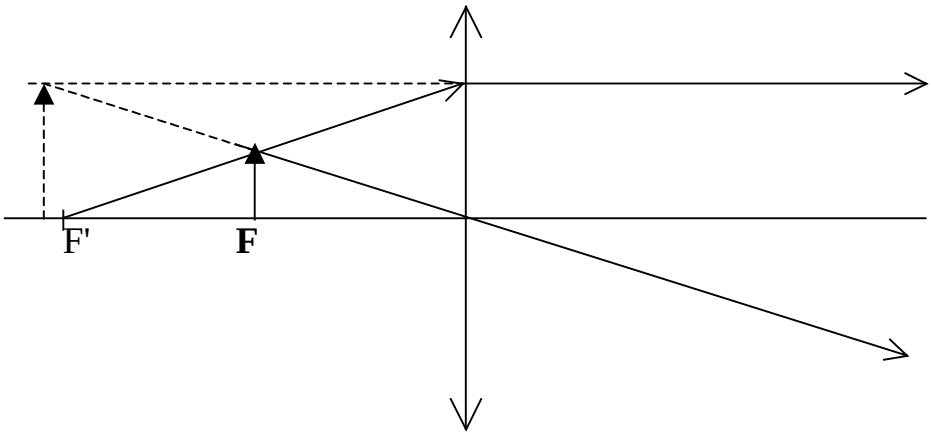
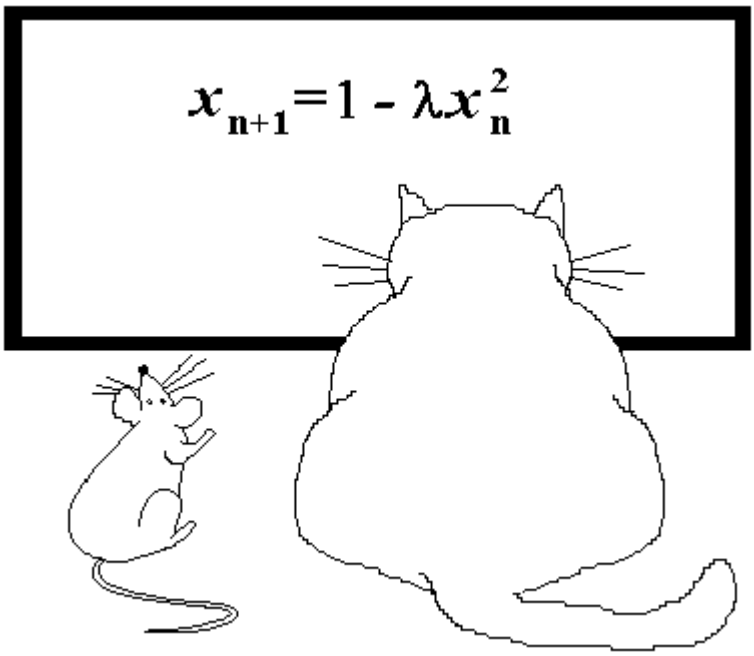


Рис. 52

Решение: Двояковыпуклая стеклянная линза в воздухе является собирающей. Поскольку предмет находится в фокусе линзы, то в пустом аквариуме его изображение будет находиться на бесконечности. Однако при заполнении аквариума водой оптическая сила линзы изменяется, т.к. преломление света на границе раздела “вода-стекло” происходит иначе, чем на границе раздела “воздух-стекло”. Поскольку показатель преломления стекла больше, чем воды, то линза останется собирающей, но ее фокусное расстояние

увеличится. (Это несложно понять с помощью следующего качественного рассуждения: если бы показатели преломления линзы и воды были одинаковыми, то преломления бы не было вообще, оптическая сила такой линзы была бы нулевой, а фокусное расстояние – бесконечно большим. Поэтому при уменьшении разности показателей преломления среды и линзы ее фокусное расстояние увеличивается.)

Таким образом, в аквариуме с водой предмет оказывается между собирающей линзой и ее фокусом и дает прямое увеличенное мнимое изображение, получаемое по обычным правилам (см. рис. 52).

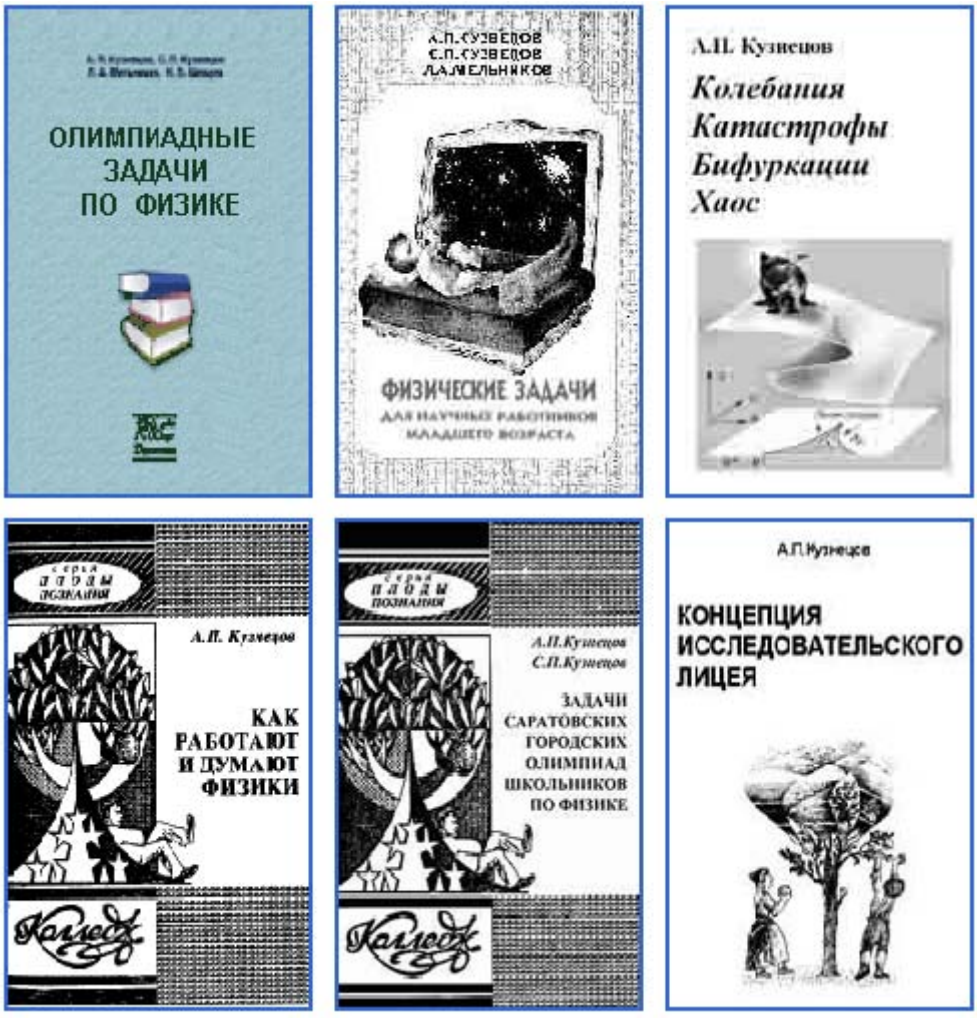


«Окно в науку»
www.sgtnd.narod.ru/wts/rus

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Предисловие	3
Часть I. Олимпиадные задачи	5
Часть II. Ответы и решения	21

Авторами изданы также и другие книги, посвященные как олимпиадным задачам, так и «неформальной» физике (оценки, метод размерностей, компьютерное моделирование, исследовательская работа школьников и т.д.). В электронном варианте эти книги можно найти в сети Internet по адресам:
http://www.sgtnd.narod.ru/publ/rus/main.htm#other
http://www.sgtnd.narod.ru/wts/rus/olimprobl.htm
http://www.sgtnd.narod.ru/wts/rus/krdf.htm



Учебное издание

Кузнецов Александр Петрович

Кузнецов Сергей Петрович

Мельников Леонид Аркадьевич

Савин Алексей Владимирович

Шевцов Владимир Николаевич

50 ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Пособие издано в авторской редакции.

Ответственный за выпуск А.В. Савин.

Подписано в печать 28.04.2006 г.
Формат 60x84 1/16. Бумага Снегурочка. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 3,712 (4,00). Тираж 100 экз.

Издательство «Научная книга»
410054,Саратов, ул. Б. Садовая, 127.