

## РОЗДІЛ 3. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ

### § 31. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ

**?!**  Закони Ньютона дозволяють розв'язати багато задач, які стосуються руху та взаємодії тіл. Однак на практиці часто буває складно виміряти або аналітично подати сили, що діють на тіло. Як, наприклад, обчислити сили, що виникають у результаті зіткнення тіл, адже при цьому змінюються і жорсткість тіл, і коефіцієнт тертя? Або як визначити сили, що виникають під час вибуху? Крім того, для розрахунків потрібно знати час взаємодії тіл, виміряти який теж іноді складно. Виявляється, розв'язання багатьох задач значно простішає, якщо скористатися законами збереження, — законом збереження імпульсу та законом збереження енергії. Ці закони безпосередньо впливають із законів Ньютона, однак відкриті вони були самостійно. Це найбільш загальні й універсальні закони не лише в механіці, але й у всій фізиці. Із цього параграфу ви дізнаєтеся про *закон збереження імпульсу*.

#### **1** Що таке імпульс сили та імпульс тіла

Згадаємо формулу для визначення прискорення:  $\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$  — і запишемо другий закон Ньютона у вигляді:  $\vec{F} = \frac{m(\vec{v} - \vec{v}_0)}{t}$ . Помноживши обидві частини рівності на  $t$ , маємо:

$$\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0. \quad (1)$$

Добуток  $\vec{F}t$  називають *імпульсом сили*. Ця величина одночасно визначає і силу, і тривалість дії, необхідної для того, щоб змінити швидкість руху тіла масою  $m$  від  $\vec{v}_0$  до  $\vec{v}$ .

**Імпульс сили** — це векторна фізична величина, яка дорівнює добутку сили на час її дії:  $\vec{F}t$ .

Одиниця імпульсу сили в СІ — **ньютон-секунда (Н·с)**.

У правій частині рівності (1) маємо зміну деякої величини  $m\vec{v}$ . Цю величину називають *імпульсом тіла* або *кількістю руху*.

**Імпульс тіла**  $\vec{p}$  — це векторна фізична величина, яка дорівнює добутку маси  $m$  тіла на швидкість  $\vec{v}$  його руху:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Одиниця імпульсу тіла в СІ — **кілограм-метр на секунду (кг·м/с)**.

На відміну від імпульсу сили *імпульс тіла залежить від вибору СВ*, тому що від вибору СВ залежить швидкість руху тіла.

Введення понять імпульсу сили й імпульсу тіла дає змогу сформулювати *другий закон Ньютона в імпульсному вигляді: зміна імпульсу тіла дорівнює імпульсу сили, яка діє на це тіло:*

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{F}t, \text{ або } \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}t.$$

З останньої рівності отримуємо ще один запис другого закону Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{\vec{p} - \vec{p}_0}{t}.$$

Розвиток механіки показав, що другий закон Ньютона, записаний в імпульсному вигляді\*, більш загальний, ніж записаний як  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ , оскільки в імпульсному вигляді він дозволяє описувати рух тіл змінної маси, наприклад рух ракет.

## 2 За яких умов систему тіл можна вважати замкнутою

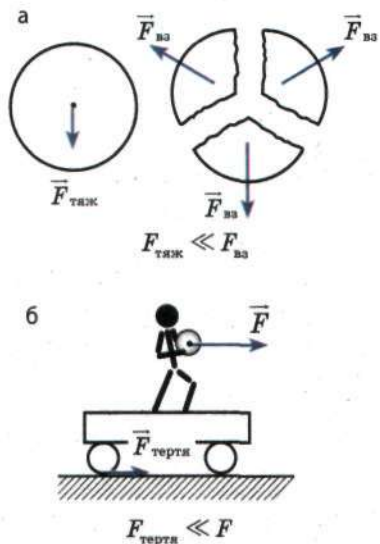
Декілька тіл, що взаємодіють одне з одним, утворюють *систему тіл*. Сили, які характеризують взаємодію тіл системи між собою, називають *внутрішніми силами системи*. Якщо тіла взаємодіють тільки внутрішніми силами, то таку систему тіл називають *замкнутою*.

**Замкнена система тіл** — це така система тіл, на яку не діють зовнішні сили, а будь-які зміни стану цієї системи є результатом дії внутрішніх сил системи.

Точно кажучи, на Землі неможливо знайти замкнену систему тіл: на будь-яке тіло поблизу поверхні Землі діє сила тяжіння, будь-який рух тіла супроводжується тертям. Тому на практиці систему тіл вважають замкнутою, якщо зовнішні сили, які діють на систему, зрівноважені або набагато менші за внутрішні сили системи.

Наприклад, під час вибуху снаряда зовнішні сили, які діють на осколки (сила тяжіння та сила опору), у багато разів менші за силу взаємодії  $\vec{F}_{\text{ва}}$  цих осколків (рис. 31.1, а), тому під час вибуху систему тіл «осколки» можна вважати замкнутою.

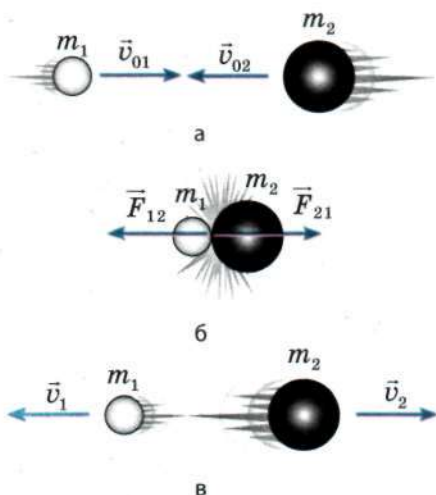
Якщо людина штовхає ядро із силою  $\vec{F}$ , стоячи на легкокорухомому візку (рис. 31.1, б), то систему тіл «людина на візку — ядро» можна вважати замкнутою, оскільки силу тяжіння зрівноважує сила нормальної реакції опори, а сила тертя кочення є незначною.



**Рис. 31.1.** Якщо зовнішні сили, що діють на систему, зрівноважені або значно менші за внутрішні сили системи, то систему можна вважати замкнутою

\* Свою другу аксіому руху І. Ньютон сформулював саме в імпульсному вигляді.

Якщо ж людина штовхає ядро, стоячи на землі, то система тіл «людина — ядро» не є замкненою, бо величину сили тертя можна порівняти із силою взаємодії людини та ядра.



**Рис. 31.2.** До виведення закону збереження імпульсу для замкненої системи, яка складається з двох тіл: а — тіла до взаємодії; б — тіла в момент взаємодії; в — тіла після взаємодії

### 3 Закон збереження імпульсу

Розглянемо взаємодію двох тіл масами  $m_1$  і  $m_2$ , які утворюють замкнену систему й рухаються відповідно зі швидкостями  $\vec{v}_{01}$  і  $\vec{v}_{02}$  (рис. 31.2, а).

У результаті взаємодії, яка триває певний проміжок часу  $t$ , обидва тіла змінюють швидкості свого руху. Оскільки система замкнена, то причиною зміни швидкості є тільки сили взаємодії  $\vec{F}_{12}$  і  $\vec{F}_{21}$  — внутрішні сили системи (рис. 31.2, б). Нехай у результаті взаємодії тіла набули швидкості  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  (рис. 31.2, в). Запишемо для кожного тіла другий закон Ньютона:

$$m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_{01} = \vec{F}_{12} t; \quad m_2 \vec{v}_2 - m_2 \vec{v}_{02} = \vec{F}_{21} t.$$

Час взаємодії  $t$  однаковий для обох тіл, а сили взаємодії згідно з третім законом Ньютона є рівними за модулем і протилежними за напрямком:  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Отже,  $m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_{01} = -(m_2 \vec{v}_2 - m_2 \vec{v}_{02})$ . Після перетворень отримаємо:

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2, \text{ або } \vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

У лівих частинах виразів — сума імпульсів тіл до взаємодії. Після взаємодії імпульс кожного тіла змінився, однак сумарний імпульс системи залишився незмінним — він *зберігся*. Отже, **закон збереження імпульсу**:

У замкненій системі тіл геометрична сума імпульсів тіл до взаємодії дорівнює геометричній сумі імпульсів тіл після взаємодії.

У слухності закону збереження імпульсу можна перекоонатись експериментально (рис. 31.3).

Закон збереження імпульсу справджується для замкненої системи, що містить будь-яку кількість тіл, — це загальний, фундаментальний закон фізики. Тому в загальному випадку *математичний вираз для закону збереження імпульсу* виглядає так:

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} + \dots + m_n \vec{v}_{0n} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n;$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \text{const},$$

де  $m_i$  — маси тіл, що утворюють замкнену систему;  $\vec{v}_{0i}$  — швидкості руху тіл системи до взаємодії;  $\vec{v}_i$  — швидкості руху тіл системи після взаємодії;  $n$  — кількість тіл, які взаємодіють;  $\vec{p}_i$  — імпульси тіл у деякий довільний момент часу.

Із проявами закону збереження імпульсу ми постійно зустрічаємося в природі, техніці, побуті. Саме законом збереження імпульсу пояснюється ефект віддачі вогнепальної зброї, рух бігової доріжки на деяких спортивних тренажерах, рух човна під час пересування по ньому людини тощо.

Зверніть увагу:

а) закон збереження імпульсу виконується тільки для замкненої системи тіл, тому, перш ніж застосувати його для розв'язання задачі, потрібно визначити, чи є замкненою дана система;

б) якщо на систему діють зовнішні сили, які не зрівноважені або дією яких не можна знехтувати, то сумарний імпульс системи змінюється — ця зміна дорівнює сумарному імпульсу зовнішніх сил:  $\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{F}t$ .

#### 4 Учимися розв'язувати задачі

**Задача.** З гармати, встановленої на гладенькій горизонтальній поверхні, під кутом  $60^\circ$  до горизонту вилітає снаряд зі швидкістю  $100$  м/с. Яку швидкість набере гармата після пострілу, якщо маса снаряду  $20$  кг, а маса гармати  $2$  т?

Дано:

$$\alpha = 60^\circ$$

$$v_1 = 100 \text{ м/с}$$

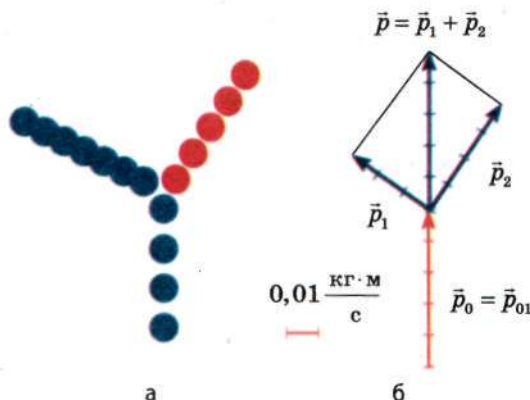
$$m_1 = 20 \text{ кг}$$

$$m_2 = 2000 \text{ кг}$$

$$v_{01} = v_{02} = 0$$

$$v_2 = ?$$

**Аналіз фізичної проблеми.** Систему тіл «снаряд — гармата» можна вважати замкненою, бо сили тертя в багато разів менші за сили, що виникають під час пострілу. Оберемо як нерухому СВ ту, що пов'язана з поверхнею Землі. Виконаємо пояснювальний рисунок, на якому позначимо напрямки швидкостей руху тіл до і після взаємодії та напрямок осі  $Ox$  (у вертикальному напрямку гармата відносно Землі не рухається — вона набуває імпульсу разом із Землею, тому досить обрати тільки вісь  $Ox$ ).



**Рис. 31.3.** Демонстрація закону збереження імпульсу під час удару двох кульок масою  $100$  г кожна; червона куля до удару перебувала в спокої: а — рисунок зі стробоскопічної фотографії руху кульок до і після удару (масштаб  $1 : 20$ ); проміжок часу між спалахами —  $0,2$  с; б — векторна діаграма імпульсів куль. До зіткнення куль імпульс  $\vec{p}_0$  системи дорівнював імпульсу  $\vec{p}_{01}$  синьої кулі:  $\vec{p}_0 = \vec{p}_{01}$ ,

$$p_{01} = m_1 v_{01} = 0,1 \text{ кг} \cdot \frac{0,1 \text{ м}}{0,2 \text{ с}} = 0,05 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

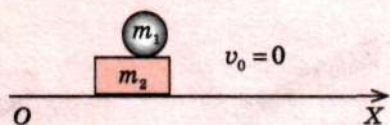
Після удару імпульс кожної кулі змінився; їхній сумарний імпульс:  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ ,

$$\text{де } p_1 = m_1 v_1 = 0,1 \text{ кг} \cdot \frac{0,06 \text{ м}}{0,2 \text{ с}} = 0,03 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$

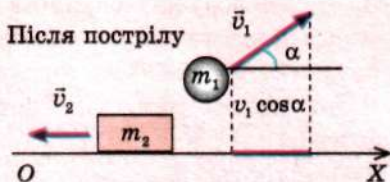
$$p_2 = m_2 v_2 = 0,1 \text{ кг} \cdot \frac{0,08 \text{ м}}{0,2 \text{ с}} = 0,04 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

З рисунка видно, що  $\vec{p}_0 = \vec{p}$ , тобто сумарний імпульс системи залишився незмінним

До пострілу



Після пострілу



Пошук математичної моделі, розв'язання. Запишемо закон збереження імпульсу у векторному вигляді:

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2.$$

Скориставшись рисунком, знайдемо проекції швидкостей на вісь  $OX$ ; маємо:  $0 = m_1 v_1 \cos \alpha - m_2 v_2$ . Звідки знайдемо  $v_2$ :

$$m_2 v_2 = m_1 v_1 \cos \alpha \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1 \cos \alpha}{m_2}.$$

Визначимо значення шуканої величини:

$$[v_2] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \{v_2\} = \frac{20 \cdot 100 \cdot 0,5}{2000} = 0,5; v_2 = 0,5 \text{ м/с}.$$

**Відповідь:** швидкість руху гармати після пострілу  $v_2 = 0,5$  м/с.

### Підбиваємо підсумки

Імпульс сили — це векторна фізична величина, яка дорівнює добутку сили  $\vec{F}$  на час  $t$  її дії:  $\vec{F}t$ .

Імпульс тіла  $\vec{p}$  — це векторна фізична величина, яка дорівнює добутку маси  $m$  тіла на швидкість  $\vec{v}$  його руху:  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

Зміна імпульсу тіла дорівнює імпульсу сили:  $m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{F}t$ .

Системи тіл, на які жодні зовнішні сили не діють, називають замкненими. Систему тіл можна вважати замкненою, якщо зовнішні сили, що діють на систему, зрівноважені або набагато менші за внутрішні сили системи. У замкненій системі тіл виконується закон збереження імпульсу: у замкненій системі тіл геометрична сума імпульсів тіл до взаємодії дорівнює геометричній сумі імпульсів тіл після взаємодії:

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} + \dots + m_n \vec{v}_{0n} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n.$$



### Контрольні запитання

1. Дайте визначення імпульсу тіла. У яких одиницях його вимірюють?
2. Дайте визначення імпульсу сили. У яких одиницях його вимірюють?
3. Сформулюйте другий закон Ньютона, використовуючи поняття імпульсу сили та імпульсу тіла.
4. Яку систему можна вважати замкненою? Наведіть приклади.
5. Які сили називають внутрішніми силами системи?
6. Сформулюйте закон збереження імпульсу.
7. Доведіть закон збереження імпульсу для двох тіл.



### Вправа № 27

1. Футболіст веде м'яч полем, рухаючись зі швидкістю 4 м/с відносно поля. Визначте імпульс м'яча відносно: а) поверхні Землі; б) футболіста, що біжить назустріч м'ячу зі швидкістю 5 м/с; в) футболіста, який веде м'яч. Масу м'яча задайте самостійно.

2. Порівняйте ваш імпульс під час бігу на 100 м з імпульсом кулі, випущеної з вогнепальної зброї. Необхідні дані задайте самостійно.
3. Багато хто з вас знайомий із ситуацією: людина встала в човні і, не дочекавшись, коли його пришвартують до причалу, пішла вперед — у результаті човен відпливає назад (див. рисунок). Поясніть дану ситуацію з погляду закону збереження імпульсу.
4. Два легкорухомі візки масами 2 і 6 кг рухаються назустріч один одному зі швидкостями 2 і 3 м/с відповідно. Після зіткнення візки почали рухатись як одне ціле. Визначте модуль та напрямок швидкості руху візків після зіткнення.
5. Із човна масою 150 кг, який рухається зі швидкістю 2 м/с, у горизонтальному напрямку зі швидкістю 6 м/с стрибає хлопчик масою 50 кг. Яку швидкість має човен після стрибка, якщо хлопчик стрибає з корми човна в бік, протилежний рухові човна? з носа човна в напрямку руху човна? Вважайте, що в кожному випадку швидкість хлопчика напрямлена під кутом  $45^\circ$  до горизонту.
6. Більярдна куля А, яка рухається зі швидкістю 10 м/с, ударила кулю Б такої ж маси, яка перебувала в спокої (див., наприклад, рис. 31.3). Визначте швидкості руху кулі після удару, якщо швидкість кулі А напрямлена під кутом  $30^\circ$  до напрямку її руху до удару, а швидкість кулі Б — під кутом  $60^\circ$  до напрямку руху кулі А до удару.
- 7\*. Людина масою 70 кг переходить із корми на ніс човна. На яку відстань і в який бік відносно берега відпливе човен, якщо його маса 130 кг, а довжина 4 м? Рухи людини та човна вважати рівномірними.



## § 32. РЕАКТИВНИЙ РУХ. РАКЕТИ

?!

Завдяки чому можуть рухатися люди, автомобілі, потяги, тварини? Чому літають планери, птахи, метелики? Чому плавають риби, катери, підводні човни? Відповідь є простою: усі перелічені тіла рухаються тому, що від чогось відштовхуються: людина, тварина, автомобіль, потяг — від поверхні Землі; планери, птахи, метелики — від повітря; риби та катери — від води. А як у випадку з космічним літальним апаратом? Адже для того, щоб почати рух або змінити швидкість, він має від чогось відштовхнутись, а в космосі такої можливості немає. Проте космічні кораблі літають у відкритий космос, виконують маневри, повертаються на Землю. Від чого ж вони відштовхуються? З'ясуємо.

### 1 Який рух називають реактивним

Проведемо невеликий дослід. Надуємо повітряну кульку і, не стягаючи її отвір ниткою, відпустимо. Кулька почне рухатись і рухатиметься доти, поки з отвору виривається повітря. У цьому випадку ми маємо справу з так званим *реактивним рухом*.

**Реактивний рух** — це рух, що виникає внаслідок відділення з певною швидкістю від тіла якоїсь його частини.

Основою реактивного руху є закон збереження імпульсу. Повернемося до досліду з кулькою. Якщо отвір кульки закритий, вона перебуває в спокої й імпульс системи «кулька — повітря» дорівнює нулю:  $\vec{p}_{\text{он}} + \vec{p}_{\text{ок}} = 0$ . Якщо отвір відкрити, то повітря почне вириватися

назовні з досить великою швидкістю, тобто набуде деякого імпульсу:  $\vec{p}_n = m_n \vec{v}_n$ . Сама кулька теж набуде імпульсу:  $\vec{p}_k = m_k \vec{v}_k$ , напрямленого в бік, протилежний імпульсу повітря.

Відповідно до закону збереження імпульсу загальний імпульс системи «кулька — повітря» залишається незмінним і дорівнює нулю:  $m_n \vec{v}_n + m_k \vec{v}_k = 0$ . Отже, швидкість руху кульки становить:

$$\vec{v}_k = -\frac{m_n}{m_k} \vec{v}_n.$$

Знак «-» говорить про те, що кулька рухається в напрямку, протилежному напрямку руху повітря.

Розглянемо ще один приклад — віддачу автомата, який робить  $n$  пострілів за секунду. Позначимо масу однієї кулі  $m_k$ , а її швидкість у момент вильоту із дула —  $\vec{v}$ . Загальна зміна імпульсу куль за секунду (швидкість зміни імпульсу) буде  $nm_k \vec{v}$ . Сила  $\vec{F}$ , яка діє на кулі, дорівнює швидкості зміни імпульсу куль:

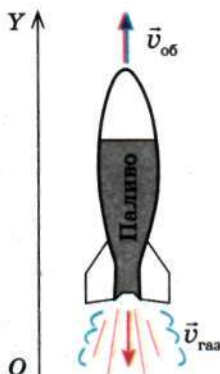
$$\vec{F} = nm_k \vec{v}.$$

Згідно з третім законом Ньютона така сама за модулем сила, але напрямлена протилежно діє й на автомат. Отже, у результаті стрільби на автомат діє постійна сила, яка визначається скорострільністю автомата, масою та швидкістю куль.

Аналогічно виникає рушійна *реактивна сила* в ракеті, коли з її сопла витікає газ.

## 2 Реактивний рух ракети

**Ракета** — літальний апарат, який переміщується в просторі завдяки реактивній тязі, що виникає внаслідок відкидання ракетною частиною власної маси.



**Рис. 32.1.** Застосування закону збереження імпульсу до описання руху ракети ( $\vec{v}_{об}$  — швидкість руху оболонки ракети;  $\vec{v}_{газ}$  — швидкість руху газу)

Відокремлюваною частиною ракети (робочим тілом) є струмінь гарячого газу, який утворюється в ході згоряння палива. Коли газовий струмінь із величезною швидкістю викидається із сопла ракети, то оболонка ракети одержує потужний імпульс, напрямлений у бік, протилежний швидкості руху струменя.

Уявімо неймовірний варіант: у момент старту все паливо ракети згорає відразу. Оскільки до старту ракета перебуває у спокої, то закон збереження імпульсу після згоряння палива виглядав би так:  $0 = m_{газ} \vec{v}_{газ} + m_{об} \vec{v}_{об}$ . Напрямимо вісь  $OY$  в бік руху ракети (рис. 32.1); спроектувавши векторне рівняння на цю вісь, маємо:  $0 = -m_{газ} v_{газ} + m_{об} v_{об}$ , звідки:

$$v_{об} = \frac{m_{газ}}{m_{об}} v_{газ}.$$

Якщо припустити, що маса палива в 4 рази більша, ніж маса оболонки ракети  $\left(\frac{m_{\text{газ}}}{m_{\text{об}}} = 4\right)$ , а швидкість реактивного струменя

$v_{\text{газ}} = 2$  км/с (приблизно з такою швидкістю із сопла ракети виривається розпечений газ), одержимо швидкість руху оболонки ракети:  $v_{\text{об}} = 4v_{\text{газ}} = 8$  км/с.

Отже, якби паливо ракети згоряло миттєво, то швидкість, набрана ракетою, була б достатньою для того, щоб вивести ракету на орбіту Землі (перша космічна швидкість поблизу поверхні Землі 7,9 км/с). Однак у реальності паливо згоряє поступово, і розрахунки показують, що в такому випадку для досягнення першої космічної швидкості маса палива має бути в 50 разів більшою за масу оболонки ракети. А якщо врахувати, що на рух ракети помітно впливають притягання Землі та опір повітря, то дістанемо результат, що маса палива має у 200 разів перевищувати масу оболонки, а це нереально реалізувати технічно.

Ще російський радянський учений *Костянтин Едуардович Ціолковський* (1857–1935) довів, що одноступенева ракета не зможе покинути Землю, і запропонував ідею створення «ракетних потягів», які стали прототипом багаступневих ракет. У таких ракетах ступені зі спорожнілими паливними резервуарами відкидаються в польоті та згорають в атмосфері через тертя об повітря. При цьому маса ракети зменшується і, відповідно, збільшується швидкість її руху.

На рис. 32.2 подано триступеневу ракету-носієй «Восток». Вона складається з чотирьох бічних блоків (I ступінь), розташованих навколо центрального блока (II ступінь). Космічний апарат установлюється на III ступені, під головним обтічником, що захищає його від аеродинамічних навантажень під час польоту в щільних шарах атмосфери. Кожний блок оснащений власними двигунами.

12 квітня 1961 р. ракета-носієй «Восток» доставила на орбіту космічний корабель «Восток», на борту якого був перший в світі космонавт *Ю. О. Гагарін* (рис. 32.3).

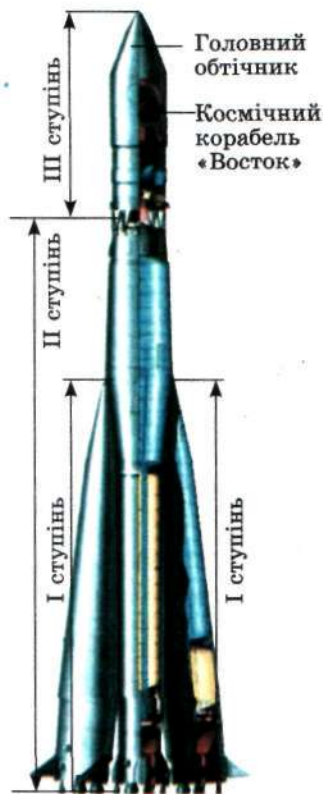


Рис. 32.2. Триступенева ракета-носієй «Восток»



Рис. 32.3. Юрій Олексійович Гагарін (1934–1968) — радянський льотчик-космонавт, перша людина в світі, яка здійснила політ у космос (12 квітня 1961 р.)



На космічних кораблях «Восток» було здійснено перші польоти людини в космос:

Космонавти	Дата польоту, тривалість	
Юрій Гагарін	12 квітня 1961 р.;	1 год 48 хв
Герман Титов	6–7 серпня 1961 р.;	25 год 18 хв
Андріян Ніколаєв	11–15 серпня 1962 р.;	94 год 22 хв
Павло Попович	12–15 серпня 1962 р.;	70 год 57 хв
Валерій Биковський	14–19 червня 1963 р.;	119 год 6 хв
Валентина Терешкова	16–19 червня 1963 р.;	70 год 50 хв



#### Контрольні запитання

1. Дайте визначення реактивного руху. 2. Опишіть досліди зі спостереження реактивного руху. 3. Запишіть закон збереження імпульсу для руху ракети, припустивши, що все її паливо згоряє миттєво у момент старту. Чому в цьому випадку розрахунок швидкості руху ракети дає набагато більший результат, ніж виявляється під час руху реальної ракети? 4. Чому для запускання космічних кораблів з поверхні Землі використовують багатоступеневі ракети? 5. Назвіть космонавтів, які літали на космічних кораблях «Восток».



О. М. Гузь

#### ФІЗИКА ТА ТЕХНІКА В УКРАЇНІ

##### Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ)

Інститут, створений у 1918 р., зараз є найпотужнішим в Україні в галузі механіки та всесвітньо відомим дослідницьким центром. У 1993 р. йому присвоєно ім'я першого директора *Степана Прокоповича Тимошенка*.

Основні напрямки наукової діяльності Інституту: механіка композитних і неоднорідних середовищ, оболонкових систем, зв'язаних полів у матеріалах і елементах конструкцій; механіка руйнування та втома; динаміка та стійкість механічних систем.

Теоретичні та експериментальні результати науковців Інституту застосовуються в ракетно-космічній, авіаційній, судобудівній та інших галузях промисловості, використовуються в інженерній практиці провідних науково-дослідницьких і проектно-конструкторських організацій і підприємств України та інших країн.

В Інституті сформувались визнані в світі школи з механіки, зокрема школа нелінійних коливальних Крилова — Боголюбова — Митропольського, школа Гузя.

З 1976 р. Інститут очолює академік НАНУ *Олександр Миколайович Гузь* (див. фото) — член багатьох Академій наук, лауреат Державних премій України (1979, 1983) і СРСР (1985), премій НАНУ; нагороджений медаллю Паскаля Європейської Академії Наук (2007).

## § 33. МЕХАНІЧНА РОБОТА. ПОТУЖНІСТЬ

**?** З поняттям механічної роботи ви вже знайомі з курсу фізики 8-го класу. Власне, ви напевне вже помітили, що в цьому навчальному році вам часто зустрічаються знайомі поняття, однак щоразу ви не тільки згадуєте те, що вивчали раніше, але й довідуєтеся про нове. Зустріч із новим очікує на вас і в цьому параграфі.

### 1 Як обчислити механічну роботу

Про механічну роботу говорять тоді, коли тіло змінює своє положення в просторі (переміщується) під дією сили. Таким чином, можна сказати, що *робота* — просторова характеристика дії сили. І сила  $\vec{F}$ , і переміщення  $\vec{s}$  є векторними величинами, тому робота сили залежить від взаємної орієнтації векторів сили та переміщення.

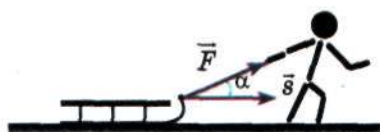
**Механічна робота (робота сили)  $A$**  — це фізична величина, яка дорівнює добутку модуля сили  $F$  на модуль переміщення  $s$ , що його здійснює тіло під дією цієї сили, і на косинус кута  $\alpha$  між вектором сили та вектором переміщення:

$$A = F s \cos \alpha$$

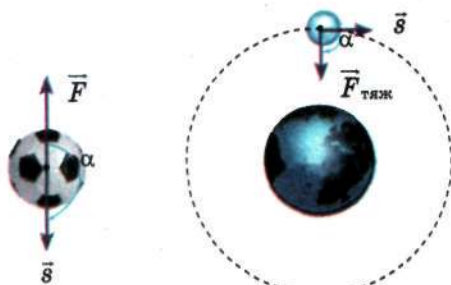
Одиниця роботи в СІ — джоуль (Дж). 1 Дж дорівнює механічній роботі, яку виконує сила 1 Н, переміщуючи тіло на 1 м у напрямку дії цієї сили (1 Дж = 1 Н · м).

Робота сили, що діє на тіло, є величиною скалярною, але вона може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю — залежно від того, куди напрямлена сила відносно напрямку руху самого тіла (рис. 33.1).

Якщо під час руху тіла кут між вектором сили і вектором переміщення змінюється, то повна робота сили дорівнює сумі робіт на кожній із ділянок такого руху (рис. 33.2).



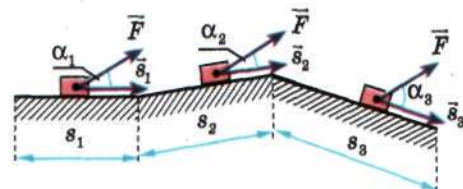
a



b

v

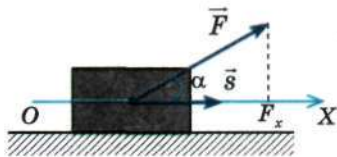
**Рис. 33.1.** Залежно від кута  $\alpha$  між вектором сили  $\vec{F}$  і вектором переміщення  $\vec{s}$  робота сили може бути: а — додатною, якщо  $0 < \alpha < 90^\circ$  ( $\cos \alpha > 0$ ); б — від'ємною, якщо  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  ( $\cos \alpha < 0$ ); в — дорівнювати нулю, якщо  $\alpha = 90^\circ$  ( $\cos \alpha = 0$ )



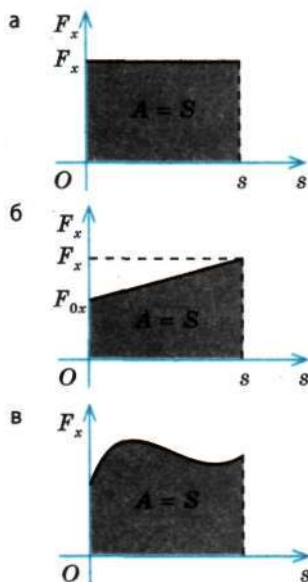
**Рис. 33.2.** Робота є величиною адитивною, отже, роботу сили можна додавати:  
 $A = A_1 + A_2 + A_3 = F s_1 \cos \alpha_1 + F s_2 \cos \alpha_2 + F s_3 \cos \alpha_3$

### 2 Яким є геометричний зміст роботи сили

Нехай сила, що діє на тіло, є постійною й напрямленою під певним кутом  $\alpha$  до напрямку переміщення. Напрямимо вісь координат (вісь  $Ox$ ) у бік



**Рис. 33.3.** Робота сили дорівнює добутковій проекції сили на вісь, напрямлену в бік переміщення тіла, і переміщення тіла:  $A = F_x s$



**Рис. 33.4.** Якщо напрямок осі  $OX$  збігається з напрямком переміщення тіла, то робота  $A$  сили чисельно дорівнює площі  $S$  фігури під графіком залежності  $F_x(s)$

руху тіла (рис. 33.3). З рисунка бачимо, що  $F \cos \alpha = F_x$ , отже,  $A = F_x s$ , тобто робота сили дорівнює добутковій проекції сили на напрямок переміщення тіла і модуля переміщення тіла під дією цієї сили.

Нехай на тіло протягом усього часу руху діє постійна сила. У цьому випадку графік  $F_x(s)$  — графік залежності проекції сили від модуля переміщення — являє собою пряму, паралельну осі переміщення (рис. 33.4, а). З рисунка видно, що добуток проекції сили на переміщення відповідає площі  $S$  прямокутника під графіком залежності  $F_x(s)$ . У цьому полягає **геометричний зміст роботи сили**: робота сили чисельно дорівнює площі фігури під графіком залежності проекції сили від модуля переміщення.

Це твердження поширюється й на випадки, коли сила є змінною. Якщо під час руху проекція сили змінюється за лінійним законом, то робота сили чисельно дорівнюватиме площі трапеції (рис. 33.4, б):  $A = \frac{F_{0x} + F_x}{2} s$ , де  $F_{0x}$  — проекція сили на початку спостереження;  $F_x$  — проекція сили наприкінці спостереження. У разі довільної залежності  $F_x(s)$  робота чисельно дорівнюватиме площі криволінійної трапеції під графіком залежності  $F_x(s)$  (рис. 33.4, в).

### 3 Що таке потужність

**Потужність  $P$**  — це фізична величина, яка характеризує швидкість виконання роботи й дорівнює відношенню роботи  $A$  до проміжку часу  $t$ , за який вона виконана:

$$P = \frac{A}{t}$$

Одиниця потужності в СІ — ват\*  $\left(1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}\right)$ .

Якщо деяке тіло рухається з постійною швидкістю  $v$ , то його переміщення дорівнюватиме:  $s = vt$ , робота сили тяги становитиме:  $A = F_x s = F_x vt$ , отже, потужність можна обчислити за формулою:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{F_x vt}{t} = F_x v$$

\* Як одиницю потужності Джеймс Ватт (1736–1819) ввів кінську силу, яку іноді використовують і зараз:  $1 \text{ к. с.} = 746 \text{ Вт}$ .

Ця формула справджується й у випадку нерівномірного руху: тоді  $P$  — потужність у даний момент часу;  $F_x$  — проекція сили в даний момент часу;  $v$  — миттєва швидкість руху тіла.

Аналіз даної формули показує: у разі постійної потужності двигуна чим більша швидкість його обертання, тим меншу силу тяги він може розвинути. Наприклад, якщо автомобіль рухається на гору і потрібна більша сила тяги, водій переходить на меншу швидкість, і навпаки: на горизонтальній ділянці дороги водій переходить на більшу швидкість.

#### 4 Учимся розв'язувати задачі

Щоб визначити механічну роботу й потужність, потрібно знати силу, яка діє на тіло, переміщення тіла та час його руху. Тому розв'язання задач на розрахунок роботи й потужності зводиться до розв'язання задач кінематики та динаміки (якщо не використовувати закон збереження енергії).

**Задача.** Автомобіль масою 2 т рушає з місця з прискоренням  $2 \text{ м/с}^2$  і розганяється на горизонтальній ділянці дороги до швидкості  $20 \text{ м/с}$ . Визначте роботу сили тяги двигуна автомобіля, якщо коефіцієнт опору рухові дорівнює  $0,01$ .

Дано:

$$m = 2 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

$$v_0 = 0$$

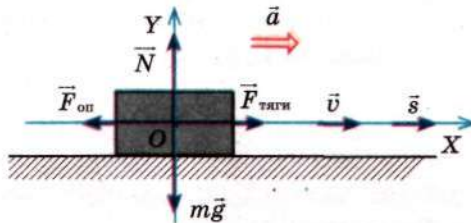
$$a = 2 \text{ м/с}^2$$

$$v = 20 \text{ м/с}$$

$$\mu = 0,01$$

$A = ?$

*Аналіз фізичної проблеми.* Для розв'язання задачі виконаємо пояснювальний рисунок, на якому зазначимо сили, які діють на тіло, напрямки прискорення й переміщення тіла. Оберемо систему координат, пов'язану з поверхнею Землі; вісь  $OX$  напрямимо в бік руху автомобіля, вісь  $OY$  — вертикально вгору.



*Пошук математичної моделі, розв'язання*

1) За означенням роботи:  $A = F_{\text{тяги}} s \cos \alpha$ . (1)

2) Щоб знайти силу тяги  $F_{\text{тяги}}$ , запишемо рівняння другого закону Ньютона у векторному вигляді:  $\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{оп}} = m\vec{a}$ .

Спроектувавши сили й прискорення на осі координат і записавши формулу для сили опору  $F_{\text{оп}}$ , маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} OX: F_{\text{тяги}} - F_{\text{оп}} = ma, \\ OY: N - mg = 0, \\ F_{\text{оп}} = \mu N. \end{cases} \quad \text{Розв'язавши одержану систему, знайдемо}$$

силу тяги:  $N = mg \Rightarrow F_{\text{оп}} = \mu mg \Rightarrow F_{\text{тяги}} = m(\mu g + a)$ . (2)

3) Щоб знайти переміщення  $s$ , скористаємося формулою:  $s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$ .

Оскільки  $s_x = s$ ,  $v_x = v$ ,  $v_{0x} = 0$ ,  $a_x = a$ , то  $s = \frac{v^2}{2a}$ . (3)

4) Кут  $\alpha$  між вектором сили і вектором переміщення дорівнює нулю, отже,  $\cos \alpha = \cos 0 = 1$ . (4)

Підставивши вирази (2)–(4) у формулу (1), маємо:

$$A = m(\mu g + a) \frac{v^2}{2a}.$$

Визначимо значення шуканої величини:

$$[A] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2 \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}{\text{м} / \text{с}^2} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж};$$

$$\{A\} = 2 \cdot 10^3 (0,1 + 2) \frac{400}{4} = 4,2 \cdot 10^5; \quad A = 4,2 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

**Відповідь:** робота сили тяги двигуна  $A = 4,2 \cdot 10^5$  Дж.

### ! Підбиваємо підсумки

Механічна робота  $A$  (робота сили) — це фізична величина, яка дорівнює добутку модуля сили  $F$  на модуль переміщення  $s$ , що його здійснює тіло під дією цієї сили, і на косинус кута  $\alpha$  між вектором сили і вектором переміщення:  $A = F s \cos \alpha$ .

Одиниця роботи в СІ — джоуль (Дж);  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Робота сили чисельно дорівнює площі фігури під графіком залежності проекції сили від модуля переміщення.

Потужність  $P$  — це фізична величина, яка характеризує швидкість виконання роботи й дорівнює відношенню роботи  $A$  до проміжку часу  $t$ , за який вона виконана:  $P = \frac{A}{t}$ .

Одиниця потужності в СІ — ват (Вт);  $1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$ .

Потужність  $P$  у даний момент часу можна обчислити за формулою  $P = F_x v$ , де  $F_x$  — проекція сили в даний момент часу;  $v$  — миттєва швидкість руху тіла.

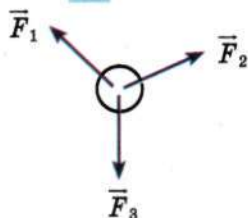


### Контрольні запитання

1. Дайте визначення механічної роботи. Яка її одиниця в СІ?
2. Що таке джоуль?
3. У яких випадках значення роботи сили додатне? від'ємне? дорівнює нулю?
4. Яким є геометричний зміст роботи сили?
5. Сформулюйте визначення потужності. Яка її одиниця в СІ?
6. Як розрахувати потужність у даний момент часу?



### Вправа № 28



1. Наведіть приклади ситуацій (не розглянутих у параграфі), коли сила, яка діє на тіло, виконує додатну роботу; від'ємну роботу; не виконує роботу.

2. На рисунку показано сили, що діють на деяке тіло. Перенесіть рисунок у зошит і позначте напрямок швидкості руху тіла, якщо:  
а)  $A_1 > 0$ ,  $A_2 < 0$ ,  $A_3 = 0$ ; б)  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$ ,  $A_3 < 0$ ; в)  $A_1 = 0$ ,  $A_2 < 0$ ,  $A_3 > 0$ .

3. Яку роботу потрібно виконати, щоб підняти вантаж масою 10 кг на висоту 5 м із прискоренням  $1,2 \text{ м/с}^2$ ?
4. Упряжка собак, протягнувши сани горизонтальною дорогою завдовжки 10 км, виконала роботу 980 кДж. Вважаючи, що коефіцієнт тертя дорівнює 0,02, а рух саней є рівномірним, визначте масу саней.
5. Ковзаняр, швидкість руху якого дорівнює 5 м/с, припиняє бігти й зупиняється протягом 3 с. Визначте роботу сили тертя, якщо маса ковзаняра 50 кг, а коефіцієнт тертя ковзання 0,15.
6. Ремінь вентилятора автомобіля рухається зі швидкістю 40 м/хв і натягнутий із силою 30 Н. Визначте потужність, яку передає ремінь.

## § 34. МЕХАНІЧНА ЕНЕРГІЯ. КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ

**?** Коли тіло (сила) виконує роботу, змінюється механічний стан тіла. Наприклад, м'яч, який падає, змінює свій стан — його висота відносно поверхні Землі зменшується; куля, вдарившись об перешкоду, зупиняється — змінюється стан її руху. З курсу фізики ви знаєте, що загальною мірою руху та взаємодії різних видів матерії є *енергія*, тому з поняттям механічної роботи нерозривно пов'язане поняття механічної енергії. Завдяки цьому параграфу ви пригадаєте поняття кінетичної енергії та отримаєте формулу для її визначення.

### 1 У яких випадках кажуть, що тіло має енергію

Розглянемо, як можна змінити механічний стан тіла, щоб воно було здатним виконати роботу. Найпростіший пристрій, у якому можна створити «запас роботи», — механічний годинник (рис. 34.1, а). Щоб годинник ішов, його потрібно завести — закрутити пружину. Розкручуючись під дією сили пружності, пружина виконає роботу, точніше — роботу виконає сила пружності пружини.

Піднявшись на вершину гори, лижник теж створює «запас роботи» і в результаті отримує можливість скотитися вниз; при цьому роботу виконуватиме сила тяжіння (рис. 34.1, б).

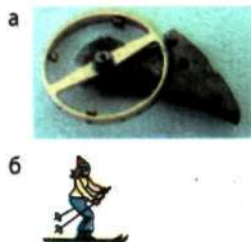
Наведемо ще приклад. Нехай потрібно розбити вікно в охопленому вогнем будинку. Найпростіший спосіб — взяти камінь і кинути його у вікно. Якщо швидкість руху каменя достатня, він розіб'є вікно, іншими словами — виконає роботу.

Ці три приклади показують, що і деформована пружина, і тіло, підняте над землею, і камінь, який має швидкість, можуть виконати роботу. Якщо тіло або система тіл можуть виконати роботу, то кажуть, що вони *мають енергію* (від грец. *energeia* — діяльність).

**Механічна енергія  $W$**  — це фізична величина, яка характеризує здатність тіла (системи тіл) виконати роботу.

*Одиниця енергії в СІ (як і роботи) — джоуль (Дж).*

Під час виконання механічної роботи енергія тіла змінюється — *механічна робота є мірою зміни енергії тіла.*



**Рис. 34.1.** Деформована пружина годинника (а) і тіло, підняте над поверхнею Землі (б), можуть виконати роботу, а отже, мають енергію

## 2 Як визначити кінетичну енергію тіла

У механіці розрізняють два види енергії — *кінетичну* та *потенціальну*. Кінетична енергія пов'язана зі швидкістю руху тіла. Саме цю енергію ми мали на увазі, коли говорили про здатність каменя, що летить, розбити вікно. Вода, рухаючись, здатна обертати турбіну, молоток може забити цвях, а вітер — ламати дерева. У кожному з цих випадків виконується механічна робота за рахунок зменшення кінетичної енергії тіла. І навпаки: якщо над тілом виконується робота, то кінетична енергія тіла збільшується.

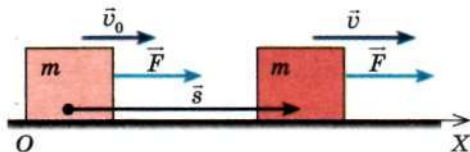


Рис. 34.2. До виведення теореми про кінетичну енергію

Розглянемо рух тіла масою  $m$ , швидкість руху якого збільшується від  $\vec{v}_0$  до  $\vec{v}$ . Нехай рівнодійна сил, прикладених до тіла, є постійною і дорівнює  $\vec{F}$  (рис. 34.2).

Визначимо роботу, яку виконує рівнодійна сила.

За означенням роботи  $A = F s \cos \alpha$ . Відповідно до другого закону Ньютона  $F = ma$ . Оскільки рівнодійна сила  $\vec{F}$  є постійною, то тіло рухається рівноприскорено прямолінійно, тому  $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ . Кут  $\alpha$  між вектором сили і вектором переміщення дорівнює нулю, отже,  $\cos \alpha = 1$ .

Підставивши вирази для  $F$ ,  $s$  і  $\cos \alpha$  у формулу роботи, маємо:

$$A = ma \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = m \frac{v^2 - v_0^2}{2}, \text{ або:}$$

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad (1)$$

Отже, робота сили дорівнює зміні деякої величини  $\frac{mv^2}{2}$ . Робота — міра зміни енергії тіла, тому величину  $\frac{mv^2}{2}$  називають *кінетичною енергією тіла, яке рухається поступально\** (від грец. *kinetikos* — який надає руху).

**Кінетична енергія  $W_k$**  — це фізична величина, яка характеризує тіло, що рухається, і дорівнює половині добутку маси  $m$  тіла на квадрат швидкості  $v$  його руху:

$$W_k = \frac{mv^2}{2}$$

Зверніть увагу: кінетична енергія тіла залежить від швидкості його руху, отже, залежить і від вибору СВ.

\* Якщо тіло не тільки рухається поступально, але й обертається, то крім кінетичної енергії поступального руху тіло має також *кінетичну енергію обертального руху*. Якщо тіло можна вважати матеріальною точкою, то кінетичною енергією його обертального руху можна знехтувати.

Після введення поняття кінетичної енергії формулу (1) можна записати так:  $A = W_{\text{к}} - W_{\text{к}0} = \Delta W_{\text{к}}$ .

Останній вираз є *математичним записом теореми про кінетичну енергію*:

Робота рівнодійної всіх сил, які діють на тіло, дорівнює зміні кінетичної енергії тіла:

$$A = W_{\text{к}} - W_{\text{к}0} = \Delta W_{\text{к}}$$

Якщо в початковий момент часу тіло є нерухомим ( $v_0 = 0$ ), тобто  $W_{\text{к}0} = 0$ , то теорема про кінетичну енергію зводиться до рівності:

$$A = W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}.$$

*Кінетична енергія тіла, що рухається зі швидкістю  $v$ , дорівнює роботі, яку виконує сила для того, щоб надати нерухомому тілу даної швидкості.*

### Підбиваємо підсумки

Механічна енергія  $W$  — фізична величина, яка характеризує здатність тіла виконати роботу. Одиниця енергії в СІ — джоуль (Дж).

Кінетична енергія тіла — фізична величина, яка характеризує тіло, що рухається, і дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості його руху:  $W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}$ .

Кінетична енергія тіла, що рухається зі швидкістю  $v$ , дорівнює роботі, яку виконує сила для того, щоб надати нерухомому тілу даної швидкості:  $A = W_{\text{к}}$ .

Теорема про кінетичну енергію: робота всіх сил, які діють на тіло, дорівнює зміні кінетичної енергії тіла:  $A = W_{\text{к}} - W_{\text{к}0} = \Delta W_{\text{к}}$ .

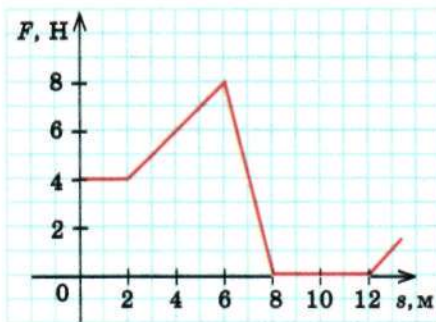
### Контрольні запитання

1. Що означає вираз «Тіло (система тіл) має (мають) енергію»?
2. Яка одиниця енергії в СІ?
3. Наведіть приклади на підтвердження того, що під час виконання роботи енергія змінюється.
4. Дайте визначення кінетичної енергії тіла.
5. Сформулюйте теорему про кінетичну енергію.
6. Чи може залишатися незмінною кінетична енергія тіла, якщо рівнодійна сил, прикладених до нього, відмінна від нуля?
7. Яким є фізичний зміст кінетичної енергії?

### Вправа № 29

1. Під час міжпланетних перельотів серйозною небезпекою може стати зіткнення космічного корабля з невеликими високошвидкісними метеоритами. Визначте кінетичну енергію мікрометеорита масою 1 кг, який рухається зі швидкістю 60 км/с.
2. Автомобіль масою 1 т збільшив свою швидкість від 10 до 20 м/с. Визначте роботу рівнодійної сил, які діють на автомобіль.
3. Ракета, яка летить зі швидкістю  $v$ , розігнала до вдвічі більшої швидкості. У результаті згорання палива повна маса ракети зменшилася вдвічі порівняно з її масою на початку розгону. У скільки разів змінилася при цьому кінетична енергія ракети?





4. Куля масою 10 г має швидкість руху 400 м/с. З якою швидкістю куля продовжить свій рух після пробиття дошки завтовшки 5 см, якщо середня сила опору дошки дорівнює 12 кН?

5. На тіло масою 5 кг (яке в момент початку спостереження перебувало в спокої) діє сила, напрямком якої збігається з напрямком подальшого руху тіла. Залежність цієї сили від пройденої тілом відстані подано на рисунку. Визначте кінетичну енергію тіла на відстані  $s$ , якщо: а)  $s=2$  м; б)  $s=5$  м; в)  $s=10$  м.

6\*. Кулю масою 10 г випущено під певним кутом до горизонту з початковою швидкістю 600 м/с. Під яким кутом до горизонту випущено кулю, якщо її кінетична енергія у верхній точці траєкторії дорівнює 450 Дж?

## § 35. ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ

?!

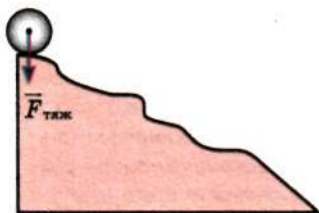
Піднятий над поверхнею Землі важкий молот не має кінетичної енергії, бо швидкість його руху дорівнює нулю. Проте якщо молот відпустити, він виконає роботу, наприклад заб'є в землю палю. Натягнута тятива лука теж не має кінетичної енергії, але якщо прибрати руку, що втримує її в деформованому стані, то, випрямившись, тятива надасть швидкості стрілі, а отже, виконає роботу. І деформоване тіло, і тіло, підняте над поверхнею Землі, здатні виконати роботу, тобто мають енергію. Що це за енергія і як її розрахувати?

1

### Коли тіло має потенціальну енергію

Будь-яке тіло, що рухається, може виконати роботу, оскільки воно має кінетичну енергію, або «живу силу», як її називали раніше. Є ще один вид механічної енергії — її називали «мертва сила» — це енергія, яку має тіло в результаті взаємодії з іншими тілами; її називають *потенціальною енергією* (від латин. *potentia* — сила, можливість).

**Потенціальна енергія  $W_n$**  — це енергія, яку має тіло внаслідок взаємодії з іншими тілами або внаслідок взаємодії частин тіла між собою.



**Рис. 35.1.** Кулька, піднята на деяку висоту, має потенціальну енергію: якщо кульку відпустити, під дією сили тяжіння вона почне рухатись і виконає роботу

Кулька, розташована на нерівній гірці (рис. 35.1), має потенціальну енергію, бо якщо її відпустити, то в результаті взаємодії із Землею вона почне рухатись і сила тяжіння, що діє на кульку, виконає роботу. Як обчислити цю роботу, адже протягом усього часу руху кут між напрямком сили тяжіння і напрямком переміщення постійно змінюється? Виявляється, все не так складно. Сила тяжіння має одну чудову властивість — робота цієї сили не залежить від форми траєкторії. У фізиці сили, робота яких не залежить від форми траєкторії, називають *консервативними, або потенціальними, силами* (від латин. *conservare* — зберігати, охороняти).

## 2 Як обчислити потенціальну енергію піднятого тіла

Доведемо, що сила тяжіння — консервативна сила. Для цього уявно перемістимо кульку масою  $m$  із положення  $K$  в положення  $B$  по декількох різних траєкторіях.

**Випадок 1.** Нехай траєкторія руху кульки — «сходінка» (рис. 35.2, а): спочатку кулька падає з певної висоти  $h_0$  до висоти  $h$ , а потім рухається горизонтально. Обчислимо роботу сили тяжіння. Оскільки робота — величина адитивна, то  $A = A_{KC} + A_{CB}$ . За означенням роботи  $A_{KC} = F s_{KC} \cos \alpha$ . Оскільки  $F = mg$ ,  $s_{KC} = h_0 - h$ , а  $\alpha = 0$  ( $\cos \alpha = 1$ ), то  $A_{KC} = mg(h_0 - h)$ .

На ділянці  $CB$  сила тяжіння перпендикулярна до переміщення й роботу не виконує ( $A_{CB} = 0$ ), тому остаточно маємо:

$$A = mg(h_0 - h) + 0 = mgh_0 - mgh = -(mgh - mgh_0).$$

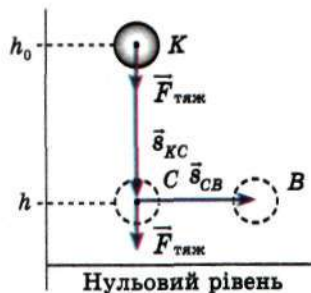
**Випадок 2.** Нехай кулька переміщується з положення  $K$  в положення  $B$ , зісковзуючи вздовж похилої (рис. 35.2, б). Робота сили тяжіння в цьому випадку становить:

$$A = mgs_{KB} \cos \alpha = mg(h_0 - h) = mgh_0 - mgh = -(mgh - mgh_0).$$

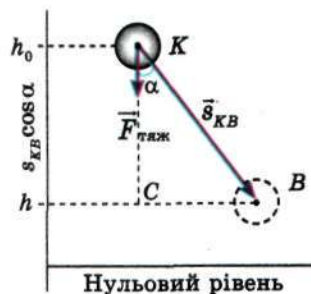
**Випадок 3.** Нехай кулька переміщується з положення  $K$  в положення  $B$ , рухаючись по довільній траєкторії (рис. 35.2, в). Щоб визначити роботу сили тяжіння, розіб'ємо траєкторію тіла на  $n$  ділянок. Якщо ці ділянки досить малі, то рух на кожній із них можна вважати рухом по прямій. Знайдемо повну роботу сили тяжіння:  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = mg(h_0 - h_1) + mg(h_1 - h_2) + \dots + mg(h_{n-1} - h) = mg(h_0 - h_1 + h_1 - h_2 + \dots + h_{n-1} - h)$ . Після скорочення маємо:

$$A = mgh_0 - mgh = -(mgh - mgh_0).$$

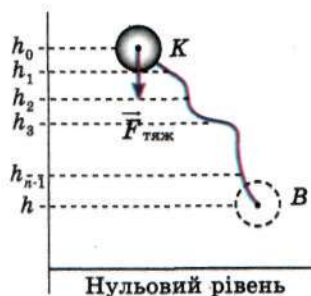
У кожному випадку одержано ту саму кінцеву формулу, отже, *робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії, а залежить тільки від початкового та кінцевого положень тіла, тобто сила тяжіння — консервативна сила.*



а



б



в

**Рис. 35.2.** У випадку переміщення тіла з точки  $K$  в точку  $B$  робота сили тяжіння завжди, незалежно від траєкторії руху тіла, визначатиметься формулою  $A = mgh_0 - mgh$ , де  $h_0$  — початкова висота, на якій перебуває тіло відносно нульового рівня (рівня, від якого відлічується висота);  $h$  — висота, на якій перебуває тіло наприкінці спостереження

Величину  $mgh$  називають *потенціальною енергією*  $W_{\text{п}}$  піднятого тіла:

$$W_{\text{п}} = mgh *$$

*Робота сили тяжіння дорівнює зміні потенціальної енергії тіла, взятій із протилежним знаком:*

$$A = -(mgh - mgh_0) = -(W_{\text{п}} - W_{\text{п}0}) = -\Delta W_{\text{п}}$$

Потенціальна енергія тіла залежить від висоти, на якій перебуває тіло, отже, *потенціальна енергія піднятого тіла залежить від вибору нульового рівня* (тобто рівня, від якого буде відлічуватися висота). *Нульовий рівень слід обирати з міркувань зручності*. Перебуваючи в класі, за нульовий рівень розумно взяти підлогу, визначаючи висоту гори — поверхню світового океану, розглядаючи коливання маятника — положення його рівноваги.

Зверніть увагу: зміна потенціальної енергії, а отже, і робота сили тяжіння від вибору нульового рівня не залежать. Справді, якщо ви зі стільця станете на стіл, а кожний учень у класі обчислить зміну вашої потенціальної енергії, то незалежно від того, положення якого тіла буде обрано за нульовий рівень (підлогу, стілець, стіл, стелю), усі учні одержать однаковий результат.

Якщо тіло під дією сили тяжіння перемістилося на нульовий рівень ( $h=0$ ), то  $A = mgh_0 = W_{\text{п}0}$ .

*Потенціальна енергія піднятого тіла дорівнює роботі, яку виконає сила тяжіння в результаті переміщення тіла на нульовий рівень.*

### 3 Потенціальна енергія пружно деформованого тіла

У пружно деформованому тілі його частини взаємодіють силами пружності. Якщо усунути зовнішній вплив, то, повертаючи тіло в недеформований стан, сили пружності виконуватимуть механічну роботу. Таким чином, *пружно деформоване тіло має потенціальну енергію*.

Нехай є деяке пружно деформоване тіло — розтягнута пружина (рис. 35.3, а, б), видовження якої  $x_0$ . Якщо пружину звільнити, то, стискаючись, вона виконає роботу (надать руху візку), при цьому деформація пружини зменшиться й видовження пружини складе  $x$  (рис. 35.3, в). Визначимо роботу сили пружності.

\* Цією формулою можна користуватися тільки для визначення потенціальної енергії тіла, яке перебуває *поблизу поверхні Землі*, де  $g$  не залежить від  $h$ . У загальному випадку потенціальну енергію піднятого тіла розраховують за формулою  $W_{\text{п}} = -G \frac{mM_{\text{з}}}{R_{\text{з}} + h}$ ; за нульовий рівень беруть точку, нескінченно віддалену від поверхні Землі.

За означенням роботи:

$$A = F_{\text{пруж}} s \cos \alpha. \quad (1)$$

Тут  $s = x_0 - x$ , а  $\cos \alpha = 1$ , оскільки кут  $\alpha$  між напрямком дії сили і напрямком переміщення дорівнює нулю (див. рис. 35.3, б, в). Модуль сили пружності можна обчислити, скориставшись законом Гука:  $F_{\text{пруж}} = kx$ . Однак у цьому випадку сила пружності залежить від видовження пружини ( $F_{\text{пруж}} \sim x$ ) (рис. 35.4), тому знайдемо середнє значення сили пружності:

$$F_{\text{пруж.сер}} = \frac{F_{\text{пруж}0} + F_{\text{пруж}}}{2} = \frac{kx_0 + kx}{2} = \frac{k}{2}(x_0 + x).$$

Підставивши вирази для  $F_{\text{пруж.сер}}$ ,  $s$  і  $\cos \alpha$  у формулу (1), маємо:

$$A = \frac{k}{2}(x_0 + x)(x_0 - x) = \frac{k}{2}(x_0^2 - x^2) = \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$$

$$\text{Отже: } A = -\left(\frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}\right).$$

Бачимо, що й у даному випадку робота сили пружності визначається тільки початковим і кінцевим положеннями тіла, тобто *сила пружності — консервативна (потенціальна) сила*.

Величину  $\frac{kx^2}{2}$  називають *потенціальною енергією пружно деформованого тіла*:

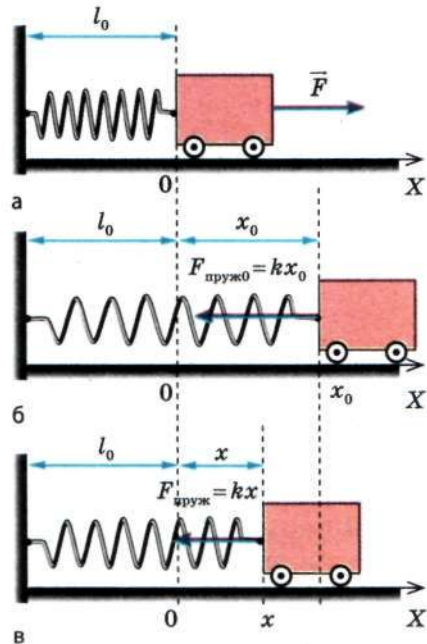
$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}$$

*Робота сили пружності дорівнює зміні потенціальної енергії тіла, взятій із протилежним знаком:*

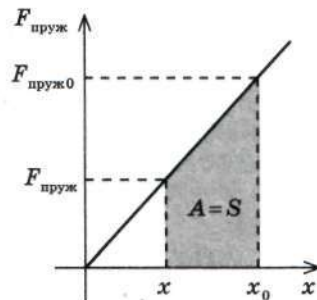
$$A = -\left(\frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}\right) = -(W_{\text{п}} - W_{\text{п}0}) = -\Delta W_{\text{п}}.$$

Якщо сила пружності, виконуючи роботу, повернула тіло в недеформований стан, то  $x = 0$ , тоді  $A = \frac{kx_0^2}{2} = W_{\text{п}0}$ .

*Потенціальна енергія пружно деформованого тіла дорівнює роботі, яку виконає сила пружності, повертаючи тіло в недеформований стан.*



**Рис. 35.3.** До виведення формули потенціальної енергії пружно деформованої пружини: а — незтягнута пружина:  $l = l_0$ ,  $x = 0$ ,  $F_{\text{пруж}} = 0$ ; б — розтягнута пружина:  $l = l_0 + x_0$ ,  $F_{\text{пруж}0} = kx_0$ ; в — пружина, що стискається:  $l = l_0 + x$ ,  $F_{\text{пруж}} = kx$



**Рис. 35.4.** Графік залежності сили пружності пружини від її видовження

**4 Теорема про потенціальну енергію**

І сила тяжіння, і сила пружності — консервативні сили. Як було показано, роботу цих сил завжди можна розрахувати за формулою:  $A = -(W_n - W_{n0}) = -\Delta W_n$ .

Даний вираз є *математичним записом теореми про потенціальну енергію*:

Робота всіх консервативних сил, які діють на тіло, дорівнює зміні потенціальної енергії тіла, взятій із протилежним знаком:

$$A = -(W_n - W_{n0}) = -\Delta W_n$$

**5 Де виявляється принцип мінімуму потенціальної енергії**

Камінь, піднятий на певну висоту й залишений сам по собі, ніколи не полетить угору — він падатиме, прагнучи досягнути стану з найменшою потенціальною енергією.

Недеформована пружина ніколи не почне розтягуватись або стискатися сама, а деформована завжди прагне перейти в недеформований стан, тому що в цьому стані її потенціальна енергія є мінімальною.

**Принцип мінімуму потенціальної енергії:**

Стан із меншою потенціальною енергією є енергетично вигідним. Будь-яка замкнена система прагне перейти в такий стан, у якому її потенціальна енергія є мінімальною.

Пригадайте різні види рівноваги тіл (див. § 30). Ми звертали увагу на той факт, що в стані *стійкої рівноваги* центр ваги тіла займає найнижче з можливих положень — у цьому стані потенціальна енергія тіла є мінімальною (див. рис. 30.5, 30.6). У стані ж *нестійкої рівноваги* центр ваги займає найвище з можливих положень; щойно тіло ледь відхилиться від положення рівноваги, воно спрямовується до стану із мінімальною потенціальною енергією (див. рис. 30.7).

**Підбиваємо підсумки**

Потенціальна енергія — це енергія, яку має тіло внаслідок взаємодії з іншими тілами або внаслідок взаємодії частин тіла між собою.

Потенціальна енергія піднятого тіла дорівнює роботі, яку виконає сила тяжіння, переміщуючи тіло на нульовий рівень:  $W_n = mgh$ .

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла дорівнює роботі, яку виконає сила пружності, повертаючи тіло в недеформований стан:  $W_n = \frac{kx^2}{2}$ .

Сила пружності та сила тяжіння — консервативні (потенціальні) сили, тому що робота цих сил не залежить від форми траєкторії.

Для консервативних сил справджується теорема про потенціальну енергію: робота всіх консервативних сил, які діють на тіло, дорівнює зміні потенціальної енергії тіла, взятій із протилежним знаком:  $A = -\Delta W_n$ .

Стан із меншою потенціальною енергією є енергетично вигідним. Будь-яка замкнена система прагне перейти в такий стан, у якому її потенціальна енергія є мінімальною.

**Контрольні запитання**

1. Дайте визначення потенціальної енергії. 2. Доведіть, що робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії. 3. За якою формулою визначають потенціальну енергію тіла, піднятого над поверхнею Землі? 4. Яку силу називають консервативною? 5. За якою формулою визначають потенціальну енергію пружно деформованого тіла? Виведіть цю формулу. 6. Сформулюйте теорему про потенціальну енергію. 7. У чому полягає принцип мінімуму потенціальної енергії? Наведіть приклади, що його підтверджують.

**Вправа № 30**

- Людина підняла відро з піском масою 15 кг на висоту 6 м, а потім поставила його назад. Чи виконала при цьому роботу сила тяжіння? Якщо так, то обчисліть її.
- Тіло масою 1 кг має потенціальну енергію 20 Дж. На яку висоту над Землею підняте тіло, якщо нуль відліку потенціальної енергії перебуває на поверхні Землі?
- У процесі розтягнення пружини на 2 см виконано роботу 1 Дж. Яку роботу слід виконати, щоб розтягти пружину ще на 2 см?
- \* На рисунку наведено графік залежності  $F_{\text{пруж}}(|x|)$  для пружини. Визначте роботу, яку необхідно виконати для стиснення пружини на 0,3 м. Яку потенціальну енергію матиме пружина у випадку її розтягнення на 0,2 м?

