§ 21. СИЛА ТЯЖІННЯ

?! Якщо взяти в руки, а потім відпустити м'яч, то він обов'язково впаде. М'яч упаде і якщо підкинути його вертикально вгору або якщо, розбігшись, спробувати закинути його якнайдалі. З курсу фізики 8-го класу ви знаєте, що падіння тіл на землю — результат гравітаційної взаємодії цих тіл і Землі. Про силу, яка характеризує цю взаємодію, йтиметься в цьому параграфі.

Рис. 21.1. Відстань r від центра Землі до тіла дорівнює сумі радіуса Землі $R_з$ і висоти h, на якій міститься тіло над поверхнею Землі

1 Що таке сила тяжіння

Сила тяжіння — сила, що характеризує гравітаційну взаємодію тіл із Землею.

Згідно із законом всесвітнього тяжіння модуль сили тяжіння $F_{тяж}$, яка діє на будь-яке тіло поблизу поверхні Землі, можна обчислити за формулою:

$$F_{тяж} = G\frac{mM_з}{r^2} = G\frac{mM_з}{(R_з + h)^2},$$

де G — гравітаційна стала; m — маса тіла; $M_з$ — маса Землі; $r = R_з + h$ — відстань від центра Землі до даного тіла (рис. 21.1).

Сила тяжіння, що діє на тіло, напрямлена вертикально вниз і прикладена до точки, яку називають *центром тяжіння тіла*.

У загальному випадку положення центра тяжіння тіла можна визначити, підвішуючи тіло по черзі за будь-які дві крайні точки (рис. 21.2). Для однорідного симетричного тіла центр тяжіння розташований у центрі симетрії (рис. 21.3).

Зверніть увагу: *центр тяжіння може перебувати й поза тілом*, тобто не збігатися з жодною з його точок (рис. 21.3, *г*).

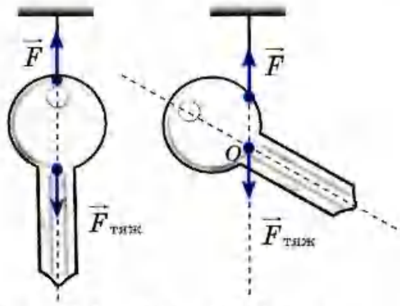


Рис. 21.2. Визначення центра тяжіння тіла: сила $\vec{F}$ натягу нитки зрівноважує силу тяжіння $\vec{F}_{тяж}$ і розташована з нею на одній прямій, тому лінії дії сили натягу нитки — вони ж лінії дії сили тяжіння — перетнуться в центрі тяжіння тіла

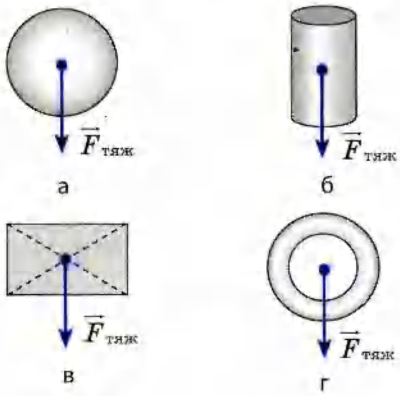


Рис. 21.3. Положення центрів тяжіння деяких однорідних симетричних тіл: *а* — кулі; *б* — циліндра; *в* — прямокутної пластинки; *г* — кільця

2 Від чого залежить прискорення вільного падіння

Якщо на тіло масою m діє тільки сила тяжіння $\vec{F}_{тяж}$, то це тіло вільно падає, рухаючись із прискоренням, яке *дорівнює прискоренню вільного падіння* ($\vec{a} = \vec{g}$).

Відповідно до другого закону Ньютона $g=\frac{F_{тяж}}{m}$. Якщо $m=1$ кг то $\{g\}=\{F_{тяж}\}$, тобто *прискорення вільного падіння чисельно дорівнює силі тяжіння, яка діє на тіло масою* 1 кг.

Прискорення вільного падіння — це прискорення, якого набуває тіло під дією сили тяжіння і яке чисельно дорівнює силі, з якою гравітаційне поле Землі діє на тіло масою 1 кг.

З формули $g=\frac{F_{тяж}}{m}$ випливає: $F_{тяж}=mg$. Отже, маємо два вирази для визначення сили тяжіння:

$$F_{тяж}=mg;\quad F_{тяж}=G\frac{mM_з}{(R_з+h)^2}.$$

Зрівнявши праві частини цих виразів, отримаємо формулу для обчислення прискорення вільного падіння:

$$g=G\frac{M_з}{(R_з+h)^2}.$$

Аналізуючи останню формулу, можна зробити низку висновків.

1. *Прискорення вільного падіння не залежить від маси тіла* (цей факт був доведений Ґ. Ґалілеєм).

2. *Прискорення вільного падіння зменшується в разі підняття тіла над поверхнею Землі*, причому помітна зміна відбувається при піднятті на десятки й сотні кілометрів (якщо підняти тіло на 100 км, прискорення вільного падіння меншає на 0,3 м/с²).

3. Якщо тіло перебуває на поверхні Землі ($h=0$) або поблизу неї ($h \ll R_з$), то прискорення вільного падіння обчислюють за формулою:

$$g=G\frac{M_з}{R_з^2}.$$

Слід звернути увагу ще на ряд чинників, які впливають на значення прискорення вільного падіння:

— *прискорення вільного падіння залежить від географічної широти місцевості*; воно незначно меншає в міру просування від полюса до екватора: на полюсах $g_{пол}\approx 9{,}83$ м/с², на широті 45° $g\approx 9{,}81$ м/с², на екваторі $g_{екв}\approx 9{,}78$ м/с². Цьому є дві причини: по-перше, форма Землі — геоїд (екваторіальний радіус Землі більший за полярний на 21 км); по-друге, Земля обертається навколо своєї осі (точно кажучи, Земля не є інерціальною СВ*);

* Якщо пов'язати СВ з географічним полюсом Землі, що є нерухомим відносно осі обертання Землі, то другий закон Ньютона для будь-якої точки на поверхні Землі буде мати вигляд: $F_{тяж}=mg+ma_{дц} \Rightarrow g=\frac{F_{тяж}-ma_{дц}}{m}$. Чим ближче до екватора, тим більшим є $a_{дц}$ і, відповідно, є меншим g.

— прискорення вільного падіння в певній місцевості може відрізнятися від його середніх значень на даній широті. Причини — в неоднорідності будови земної кори, наявності гір і западин, а також у різній густині порід, що залягають у надрах Землі. Так, зменшення прискорення вільного падіння часто свідчить про наявність у надрах торфу, нафти, газу; збільшення — про поклади металевих руд. Метод пошуку покладів корисних копалин за точним визначенням прискорення вільного падіння називають *гравіметричною розвідкою.*

Значення прискорення вільного падіння на різних географічних широтах, на висотах, які не перевищують 10 км, і в місцях гравітаційних аномалій відрізняються незначно, тому, визначаючи рух тіл, розташованих на порівняно невеликій висоті над поверхнею Землі, вважатимемо, що прискорення вільного падіння є постійним і дорівнює 9,8 м/с²; вільне падіння тіл будемо вважати рівноприскореним рухом.

3 Яким є прискорення вільного падіння на інших планетах

Силою тяжіння часто називають силу, що діє на якесь тіло поблизу поверхонь небесних тіл (зір, планет, супутників планет, астероїдів). Модуль цієї сили обчислюють за формулами:

$$F_{тяж} = G\frac{mM}{(R+h)^2}; \; F_{тяж} = mg,$$

де G — гравітаційна стала; m — маса тіла; M — маса небесного тіла; R — радіус небесного тіла; g — прискорення вільного падіння на висоті h від поверхні небесного тіла (див. таблицю).

Значення прискорень вільного падіння на поверхнях планет Сонячної системи

Планета	Символ планети	Прискорення вільного падіння, м/с²
Меркурій	☿	3,78
Венера	♀	8,9
Земля	⊕ ♁	9,81
Марс	♂	3,76
Юпітер	♃	26
Сатурн	♄	12
Уран	⛢ ♅	11
Нептун	♆	12

! Підбиваємо підсумки

Сила тяжіння — сила, яка характеризує гравітаційну взаємодію тіл із Землею. Сила тяжіння напрямлена вертикально вниз і прикладена до центра тяжіння тіла. Модуль сили тяжіння можна обчислити за формулами:

$$F_{тяж} = G\frac{mM_з}{(R_з+h)^2}; \; F_{тяж} = mg.$$

Прискорення вільного падіння чисельно дорівнює силі, з якою гравітаційне поле Землі діє на тіло масою 1 кг; воно завжди напрямлене вертикально вниз; його модуль можна обчислити за формулою:

$g = \frac{GM}{(R+h)^2}$. Якщо $h = 0$, то $g = \frac{GM}{R^2} = 9{,}8$ м/с².

Прискорення вільного падіння не залежить від маси тіла, але залежить від висоти, на якій розташоване тіло над поверхнею Землі, від широти місцевості (зменшується з рухом від полюса до екватора), від густини порід, що залягають у надрах Землі, та ін.

Силу гравітаційної взаємодії тіла з яким-небудь небесним тілом теж називають силою тяжіння, а прискорення, якого набувають тіла під дією цієї сили,— гравітаційним прискоренням або прискоренням вільного падіння.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення сили тяжіння. За якими формулами її обчислюють і як вона напрямлена? **2.** Де розташований центр тяжіння симетричних фігур? **3.** Як можна визначити положення центра тяжіння фігури довільної форми? **4.** Як розрахувати прискорення вільного падіння поблизу поверхні Землі? Від яких чинників воно залежить? **5.** Як розрахувати силу тяжіння поблизу поверхні небесного тіла?

Вправа № 18

1. Визначте масу тіла, якщо на поверхні Марса на це тіло діє сила тяжіння 7,52 Н. Обчисліть силу тяжіння, що діятиме на це тіло на поверхні Землі.

2. Вимірявши гравітаційну сталу, Г. Кавендіш зміг визначити масу Землі, після чого з гордістю сказав: «Я зважив Землю». Визначте масу Землі, знаючи її радіус $R_З$, прискорення вільного падіння на її поверхні та гравітаційну сталу.

3. Визначте гравітаційне прискорення на поверхні планети, якщо її маса у два рази менша від маси Землі, а радіус дорівнює радіусу Землі.

4. У скільки разів прискорення вільного падіння на висоті $6R_З$ менше за прискорення вільного падіння на поверхні Землі?

Експериментальне завдання

Виріжте із цупкого паперу або картону фігурку довільної форми та визначте розташування її центра тяжіння (див. рис. 21.2). Помістіть фігурку центром тяжіння на вістря голки або стрижня авторучки. Переконайтеся, що фігурка перебуває у рівновазі. Запишіть план проведення експерименту.

§ 22. РУХ ТІЛА ПІД ДІЄЮ СИЛИ ТЯЖІННЯ

Траєкторія руху м'яча, кинутого вертикально вгору або вниз, — пряма. Розбігшись, людина стрибає у воду — траєкторією руху її тіла буде гілка параболи. Снаряд, випущений із гармати під кутом до горизонту, теж опише частину параболи. Рухи всіх цих тіл відбуваються під дією сили тяжіння. Чому ж ці рухи так відрізняються один від одного? Причина — у різних початкових умовах. У цьому параграфі ви познайомитеся з розв'язанням задач на рух тіл під дією сили тяжіння.

1 Здійснюємо ряд спрощень

Характер реального руху тіла в полі тяжіння Землі є досить складним, і його описування виходить за межі шкільної програми. Тому, щоб розв'язувати задачі, приймемо низку спрощень:

1) СВ, пов'язану з точкою на поверхні Землі, вважатимемо інерціальною;

2) розглядатимемо переміщення тіл поблизу поверхні Землі й на невеликі (порівняно з її радіусом) відстані. Тоді кривизною поверхні Землі та зміною прискорення вільного падіння можна знехтувати; інакше кажучи, Землю будемо вважати плоскою, а прискорення вільного падіння — постійним;

3) будемо нехтувати опором повітря.

Зверніть увагу: якщо прийняти тільки перші два спрощення, отриманий результат буде дуже близьким до реального; останнє ж спрощення не призведе до серйозного викривлення результату тільки у випадках, коли швидкість руху тіла досить мала.

2 Які рівняння описують рух тіл під дією сили тяжіння

Під дією сили тяжіння тіло рухається рівноприскорено з прискоренням $\vec{g}$. Для такого руху рівняння залежності швидкості від часу має вигляд: $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}t$. Ця рівність показує, що рух тіла відбувається в площині, утвореній векторами $\vec{v}_0$ і $\vec{g}$, тому для опису руху тіла під дією сили тяжіння досить використати двовимірну систему координат (рис. 22.1).

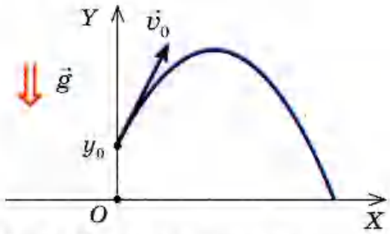


Рис. 22.1. Для описання руху тіла під дією сили тяжіння досить скористатися двовимірною системою координат. Якщо спрямувати вісь *OY* вертикально вгору (або вниз), а вісь *OX* — горизонтально, так що вектори $\vec{v}_0$ і $\vec{g}$ лежатимуть у площині *XOY*, то в будь-який момент часу тіло перебуватиме в цій площині

Будь-який складний рух для зручності можна розкласти на декілька простих. Рух тіла під дією сили тяжіння будемо розглядати як результат додавання двох простих незалежних рухів:

1) рівномірного — уздовж осі *OX* (оскільки проекція сили тяжіння на вісь *OX* дорівнює нулю),— який описується рівняннями:

$$v_x=v_{0x},\quad x=x_0+v_{0x}t; \qquad (1)$$

2) рівноприскореного (з прискоренням $\vec{g}$) — уздовж осі *OY*,— який описується рівняннями:

$$v_y=v_{0y}+g_yt,\quad y=y_0+v_{0y}t+\frac{g_yt^2}{2}. \qquad (2)$$

Зверніть увагу: характер руху тіла вздовж осі *OY* не залежить від того, чи мало тіло швидкість у горизонтальному напрямку (рис. 22.2).

Рівнянь (1) і (2) досить, щоб розв'язати практично будь-яку задачу на рух тіл під дією сили тяжіння.

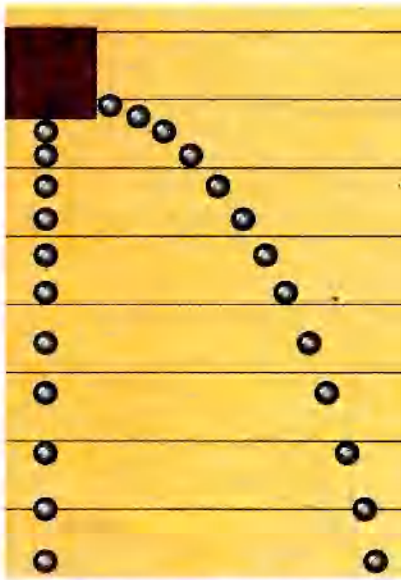


Рис. 22.2. Рисунок зі стробоскопічної фотографії руху двох кульок: одночасно одну кульку кинуто горизонтально, а друга розпочала вертикальне падіння. Обидві кульки в ті самі моменти часу опиняються на однаковій висоті, тому на Землю впадуть одночасно

3 Як рухається тіло, кинуте вертикально вгору або вниз

Якщо тіло кинути вертикально, то траєкторією руху тіла буде *відрізок прямої*, оскільки руху по осі *OX* не відбувається ($v_{0x}=0$, а $x=x_0$) (див. рис. 22.3).

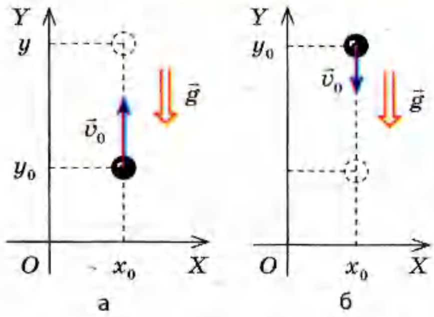


Рис. 22.3. Рух тіла, кинутого вертикально: *а* — вгору; *б* — вниз. Початок координат пов'язаний із точкою на поверхні Землі, вісь *OY* напрямлена вертикально вгору

Рис. 22.4. Траєкторія руху частинок струменя води, напрямленого горизонтально, являє собою вітку параболи. Зовнішній вигляд параболи залежить від початкової швидкості частинок води

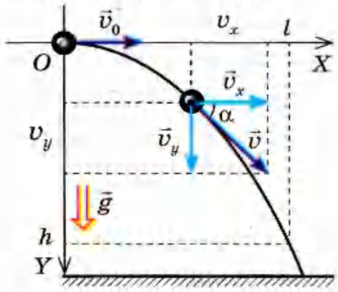


Рис. 22.5. Траєкторія руху тіла, кинутого горизонтально, являє собою вітку параболи. Швидкість *v* руху тіла в даній точці траєкторії можна розрахувати за теоремою Піфагора: $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, а кут α нахилу швидкості до горизонту знайти зі співвідношення: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x}$

Якщо початкова швидкість тіла напрямлена вертикально вгору (рис. 22.3, *а*), то в обраній системі координат $v_{0y} = v_0$, а $g_y = -g$, тому рівняння (2) набудуть вигляду:

$$v_y = v_0 - gt\,,\quad y = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Якщо початкова швидкість тіла напрямлена вертикально вниз (рис. 22.3, *б*), то $v_{0y} = -v_0$, $g_y = -g$, тому рівняння (2) набудуть вигляду:

$$v_y = -v_0 - gt\,,\quad y = y_0 - v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Із прикладом розв'язування задач на рух по вертикалі ви вже познайомилися, коли вивчали § 12.

4 Як рухається тіло, кинуте горизонтально

Якщо тіло кинуте горизонтально, то траєкторією його руху буде гілка параболи (рис. 22.4). Для доведення цього виведемо рівняння залежності $y(x)$ — рівняння траєкторії руху.

Виконаємо пояснювальний рисунок, на якому зазначимо осі координат, початкове положення тіла, напрямки його початкової швидкості та прискорення (рис. 22.5).

В обраній системі координат $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$, а $g_y = g$, тому рівняння (1) і (2) набудуть вигляду:

$$v_x = v_0\,,\quad x = v_0 t\,;$$

$$v_y = gt\,,\quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

З рівняння $x = v_0 t$ знайдемо *t*: $t = \frac{x}{v_0}$.

Підставивши одержаний вираз у рівняння $y = \frac{gt^2}{2}$, маємо: $y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$, або $y = Ax^2$, де $A = \frac{g}{2v_0^2}$ — величина стала для даного конкретного руху. З курсу математики ви знаєте, що графік функції вигляду $y = Ax^2$ — парабола.

У задачах часто потрібно визначити швидкість руху тіла в даний момент часу t. Оскільки швидкість тіла можна розкласти на складові по осі OX і по осі OY (див. рис. 22.5), то модуль швидкості можна обчислити, скориставшися теоремою Піфагора, а кут α нахилу швидкості до осі OX знайти, визначивши його тангенс:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\ ;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}.$$

Задача 1. З прямовисної скелі з висоти 20 м у море кинуто камінь; у момент кидка швидкість руху каменя була напрямлена горизонтально. З якою швидкістю кинуто камінь, якщо він упав у воду на відстані 16 м від скелі? Якою буде швидкість руху каменя в момент падіння в море? Під яким кутом камінь увійде у воду?

Дано:
$h = 20$ м
$l = 16$ м
$g \approx 10$ м/с²

v_0 — ?
v — ?
α — ?

Розв'язання

1) Виконаємо пояснювальний рисунок. Початок координат пов'яжемо з точкою кидання каменя, вісь OY напрямимо вертикально вниз, вісь OX — у напрямку початкової швидкості руху каменя (див. рис. 22.5).

2) У даному випадку: $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $x = l$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$, $g_y = g$, $y = h$, тому рівняння (1) і (2) набудуть вигляду:

$$v_x = v_0,\ l = v_0 t;\ v_y = gt,\ h = \frac{gt^2}{2}.$$

3) Із останнього рівняння визначимо час падіння: $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Знаючи час падіння каменя, визначимо початкову швидкість його руху, швидкість у момент падіння та кут α, під яким камінь увійде у воду: $l = v_0 t \ \Rightarrow\ v_0 = \dfrac{l}{t};\ v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\ ;\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{gt}{v_0}$.

Знайдемо значення шуканих величин:

$$[t] = \sqrt{\frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{м}}} = \text{с},\ \{t\} = \sqrt{\frac{2\cdot 20}{10}} = 2,\ t = 2\ \text{с};\ v_0 = \frac{16\ \text{м}}{2\ \text{с}} = 8\ \text{м/с};$$

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}},\ \{v\} = \sqrt{64 + 400} \approx 22,\ v \approx 22\ \text{м/с};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{8} = 2{,}5\ \Rightarrow\ \alpha \approx 68^\circ.$$

Відповідь: початкова швидкість руху каменя $v_0 = 8$ м/с; швидкість його руху у момент падіння $v \approx 22$ м/с; камінь увійшов у воду під кутом $\alpha \approx 68^\circ$ до горизонту.

5 Як розрахувати рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Розглянемо рух тіла, початкова швидкість v_0 якого напрямлена під кутом α до горизонту (рис. 22.6). В обраній системі координат $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, $g_y = -g$, тому рівняння (1) і (2) набудуть вигляду:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad x = v_0 \cos\alpha \cdot t;$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt, \quad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

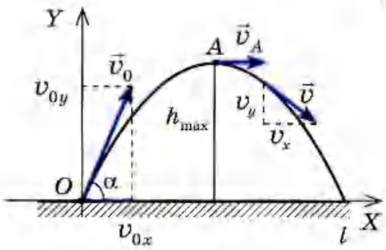


Рис. 22.6. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту: початок координат пов'язаний з точкою, із якої кинуто тіло; вісь *OY* напрямлена вертикально вниз, вісь *OX* — горизонтально; точка *A* — верхня точка траєкторії руху тіла; h_{max} — максимальна висота підняття тіла; l — дальність польоту

Якщо з рівняння $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$ знайти t і підставити одержаний вираз в останнє рівняння, отримаємо *рівняння траєкторії руху тіла, кинутого під кутом до горизонту*. Воно матиме вигляд квадратичної функції: $y(x) = Bx + Ax^2$. Таким чином, *траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту,— парабола*.

Як і в разі руху тіла, кинутого горизонтально, швидкість руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, у довільний момент часу t можна обчислити за формулою: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, а кут нахилу швидкості до осі *OX* визначити зі співвідношення: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x}$.

Далі, розглядаючи розв'язання задачі на рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, визначимо ще низку параметрів, які характеризують такий рух: *час польоту, максимальну висоту підняття, дальність польоту*. Знаходити ці параметри часто необхідно, коли маємо справу з практичними завданнями.

Задача 2. Струмінь води вилітає з брандспойта зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайдіть час польоту частинок води в струмені, дальність їхнього польоту та найбільшу висоту підняття.

Дано:	*Розв'язання*
v_0 α $g \approx 10$ м/с²	1) Виконаємо пояснювальний рисунок: початок координат пов'яжемо з точкою на поверхні Землі; вісь *OY* спрямуємо вертикально вгору; вісь *OX* — горизонтально (див. рис. 22.6).
t — ? h_{max} — ? l —?	2) В обраній системі координат $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $y_0 = 0$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, $g_y = -g$, тому рівняння (1) і (2) набудуть вигляду:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad x = v_0 \cos\alpha \cdot t; \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt, \quad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

3) Щоб визначити максимальну висоту підняття тіла, потрібно визначити час t_1 його підняття. Цей час можна знайти, знаючи, що у верхній точці траєкторії (точці A) швидкість v руху тіла напрямлена горизонтально, отже, її проекція на вісь OY дорівнює нулю: $v_y = 0$. Оскільки $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$, маємо:

$$v_0 \sin\alpha - gt_1 = 0 \;\Rightarrow\; v_0 \sin\alpha = gt_1 \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Знаючи час t_1 підняття тіла, визначимо координату y тіла в точці A — це й буде максимальна висота підняття тіла ($y_A = h_{max}$):

$$y_A = v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_0 \sin\alpha \cdot v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$ отже:

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

Загальний час t руху тіла у два рази більший за час t_1 його підняття: $t = 2t_1$, отже:

$$\boxed{t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}}$$

Дальність l польоту дорівнює координаті x тіла наприкінці руху ($l = x$). Оскільки $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$, а $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, то $l = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$. Із курсу математики відомо, що $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, отже:

$$\boxed{l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

Зверніть увагу: якщо $\alpha = 45°$, то $\sin 2\alpha = 1$. Це максимально можливе значення синуса, отже, *найбільша дальність польоту тіла досягається у випадку, якщо тіло кинуто під кутом 45° до горизонту.*

Підбиваємо підсумки

Якщо на тіло діє тільки сила тяжіння, то його рух можна розглядати як результат додавання двох простих рухів: рівномірного — по осі OX і рівноприскореного (з прискоренням $\vec{g}$) — по осі OY. Для цих рухів рівняння залежностей швидкості та координати від часу мають вигляд: $v_x = v_{0x}$, $x = x_0 + v_{0x}t$; $v_y = v_{0y} + g_y t$, $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}$.

Наведених рівнянь досить, щоб розв'язати практично будь-яку задачу на рух тіла під дією сили тяжіння. Для розв'язання задачі потрібно: 1) виконати пояснювальний рисунок; 2) скориставшись рисунком, перейти від рівняння в проекціях до рівняння в модулях; 3) використовуючи дані задачі, розв'язати систему одержаних рівнянь.

Модуль швидкості в будь-якій точці траєкторії можна обчислити, скориставшись теоремою Піфагора: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, а кут α нахилу швидкості до осі OX знайти зі співвідношення: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x}$.

Контрольні запитання

1. Які спрощення ми приймаємо, розв'язуючи задачі на рух тіл під дією сили тяжіння? **2.** Запишіть у загальному вигляді рівняння руху тіла під дією сили тяжіння. **3.** Який вигляд матимуть рівняння руху, якщо тіло кинуто вертикально? горизонтально? під кутом до горизонту? **4.** Якою є траєкторія руху тіла, кинутого вертикально? горизонтально? під кутом до горизонту? **5.** Як визначити модуль і напрямок швидкості руху тіла в будь-якій точці траєкторії?

Вправа № 19

Розв'язуючи задачі, вважайте, що $g = 10$ м/с².

1. Тіло рухається тільки під дією сили тяжіння. Систему координат обрано так, що вісь *OX* напрямлена горизонтально, вісь *OY* — вертикально вгору, початок координат розташований у точці на поверхні Землі. Опишіть, зробивши відповідний рисунок, характер руху тіла, якщо:
   а) $x_0 = 0,\ y_0 > 0,\ v_{0x} = 0,\ v_{0y} < 0$;
   б) $x_0 = 0,\ y_0 > 0,\ v_{0x} > 0,\ v_{0y} = 0$;
   в) $x_0 > 0,\ y_0 > 0,\ v_{0x} < 0,\ v_{0y} > 0$;
   г) $x_0 = 0,\ y_0 > 0,\ v_{0x} > 0,\ v_{0y} < 0$.
2. Стріла, випущена з лука вертикально вгору, впала на землю через 6 с. Знайдіть початкову швидкість руху стріли та максимальну висоту її підняття.
3. М'яч кинутий горизонтально з висоти 2 м з початковою швидкістю 5 м/с. Через який час, з якою швидкістю та під яким кутом м'яч упаде на Землю? Визначте також дальність польоту та переміщення м'яча.
4. Куля вилетіла з рушниці зі швидкістю 200 м/с у горизонтальному напрямку. Чи влучить куля у вертикальну мішень діаметром 10 см, якщо та розташована на відстані 100 м від стрільця, а її центр міститься нижче від лінії стрільби на 1 м?
5. Визначте максимальну висоту підняття та дальність польоту каменя, кинутого з початковою швидкістю 10 м/с під кутом 45° до горизонту.
6*. Гравець посилає м'яч з висоти 1,2 м під кутом 45° до горизонту. На відстані 20 м від гравця й на висоті 7 м від підлоги розташована сітка. Чи перелетить м'яч через сітку, якщо початкова швидкість його руху 20 м/с?

Експериментальне завдання

Покладіть на стіл невелику важку кульку та штовхніть її. Під час руху по столу швидкість кульки практично не змінюється. Спробуйте її визначити без секундоміра. Це можна зробити, якщо дозволити кульці спокійно скотитися зі столу, — тоді для визначення швидкості її руху по столу буде потрібна тільки лінійка. Подумайте, як це зробити. Запишіть план експерименту та проведіть його.

§ 23. ШТУЧНІ СУПУТНИКИ ЗЕМЛІ. ПЕРША КОСМІЧНА ШВИДКІСТЬ

Серед праць І. Ньютона, присвячених відкриттю закону всесвітнього тяжіння, можна знайти рисунок, схожий на рис. 23.1. Що він означає? Уявіть, що ви стоїте на краю прямовисної скелі, біля вас — гармата й кілька ядер. Якщо просто зіштовхнути ядро зі скелі, воно падатиме вниз по прямій, а якщо випустити ядро з гармати в напрямку горизонту, то воно падатиме по параболі. А як буде рухатися ядро, якщо весь час збільшувати його початкову швидкість?

1 Що таке перша космічна швидкість

У § 22, коли йшлося про рух тіл під дією сили тяжіння, ми прийняли деякі спрощення. Нагадаємо: 1) СВ, пов'язану із Землею, вважаємо інерціальною; 2) прискорення вільного падіння вважаємо постійним, а Землю — плоскою; 3) не враховуємо опір повітря. Приймемо без змін перше й третє спрощення, проте врахуємо, що Земля має форму кулі, а прискорення вільного падіння тіла залежить від висоти, на якій перебуває тіло над поверхнею Землі.

Проведемо мислений експеримент. Уявімо, що ми стріляємо з гармати ядрами в горизонтальному напрямку, з кожним пострілом збільшуючи швидкість руху ядра. Відповідно щоразу ядро падатиме все далі. Якщо уявити, що Земля є плоскою, то на цьому наш експеримент можна і закінчити: більше нічого цікавого не відбудеться. Але Земля має форму кулі, тому з кожним пострілом вона все більше й більше «йтиме» з-під ядра (див. рис. 23.1).

Тепер уявімо, що ми надали ядру такої великої швидкості, що воно облетіло навколо Землі та повернулося до місця пострілу. Опором повітря нехтуємо, тому, облетівши навколо Землі, ядро повернеться у вихідну точку точно з тією самою швидкістю, з якою було випущене. При цьому ядро не зупиниться, а й далі рухатиметься з постійною швидкістю, «намотуючи кола» навколо планети. Інакше кажучи, ми отримаємо *штучний супутник Землі*. Супутником може стати будь-яке тіло, аби тільки йому надати достатньої швидкості.

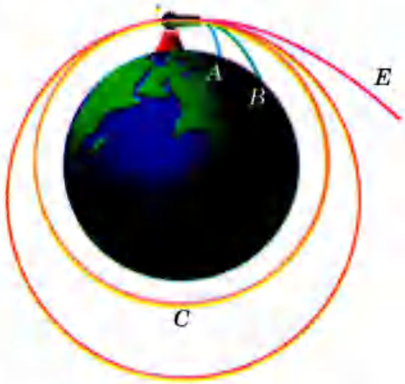


Рис. 23.1. Рух тіла під дією сили тяжіння (за рисунком І. Ньютона): снаряди A і B падають на Землю, снаряд C виходить на колову орбіту, D — на еліптичну, снаряд E летить у відкритий космос

Швидкість, яку треба надати тілу в момент запуску з даної планети, щоб тіло стало її штучним супутником і при цьому рухалося б по колу, центр якого збігається з центром цієї планети, називають **першою космічною швидкістю**.

2 Як обчислити першу космічну швидкість

Штучний супутник планети рухається по колу з постійною лінійною швидкістю, отже, він рухається з прискоренням, яке напрямлене до центра планети і модуль якого можна обчислити за формулою:

$$a_{\text{дц}} = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R+h},$$

де v — лінійна швидкість руху супутника; $r = R + h$ — відстань від супутника до центра планети.

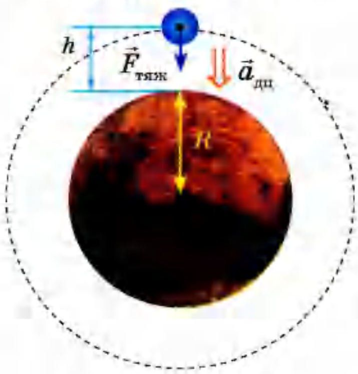


Рис. 23.2. На супутник, що рухається навколо планети по коловій орбіті на висоті h від поверхні планети, діє сила тяжіння $\vec{F}_{\text{тяж}}$ з боку планети, у результаті чого супутник має доцентрове прискорення $\vec{a}_{\text{дц}}$; R — радіус планети

Доцентрового прискорення супутнику надає єдина сила, що діє на нього,— сила тяжіння (рис. 23.2): $F_{\text{тяж}} = G\frac{mM}{(R+h)^2}$, де G — гравітаційна стала; m — маса супутника; M — маса планети.

Згідно з другим законом Ньютона $a_{дц} = \frac{F_{тяж}}{m} = \frac{GM}{(R+h)^2}$, таким чином: $\frac{v^2}{R+h} = \frac{GM}{(R+h)^2}$, отже, $v^2 = \frac{GM}{R+h}$, звідки:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}. \qquad (1)$$

Формула (1) є *формулою для обчислення швидкості руху супутника на висоті h над поверхнею планети.*

Визначимо значення першої космічної швидкості поблизу поверхні Землі. Оскільки поблизу поверхні Землі $h \approx 0$, то формула (1) набуде вигляду:

$$v = \sqrt{\frac{GM_З}{R_З}}.$$

Цю формулу можна значно спростити, якщо згадати, що поблизу поверхні Землі $g = \frac{GM_З}{R_З^2}$, звідки $\frac{GM_З}{R_З} = gR_З$. Остаточно маємо:

$$v = \sqrt{gR_З}.$$

Оскільки $g = 9{,}8$ м/с², а $R_З = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, то $v = \sqrt{9{,}8\,\text{м/с}^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\,\text{м}} = 7{,}9 \cdot 10^3$ м/с. Отже, $v = 7{,}9$ км/с — *перша космічна швидкість поблизу поверхні Землі.* Саме таку швидкість у горизонтальному напрямку потрібно надати тілу на невеликій (порівняно з радіусом Землі) висоті, щоб це тіло стало штучним супутником Землі, який рухається по коловій орбіті (рис. 23.3).

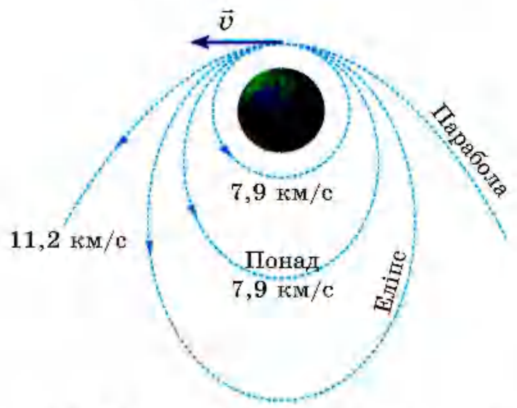


Рис. 23.3. Якщо супутник Землі має швидкість $v = 7{,}9$ км/с (першу космічну швидкість), то він рухається по коловій орбіті; за швидкості 7,9 км/с $< v <$ 11,2 км/с він рухається по еліптичній орбіті. Розвинувши швидкість 11,2 км/с (друга космічна швидкість) супутник Землі подолає її притягання та стане супутником Сонця

Про перший штучний супутник Землі та роль українських учених в освоєнні космічного простору ви дізнаєтеся, познайомившись із *Енциклопедичною сторінкою* наприкінці підручника.

3 Учимося розв'язувати задачі

Задача. Обчисліть середній радіус орбіти геостаціонарного супутника Землі (орбіту вважайте коловою).

(Кутова швидкість геостаціонарних супутників збігається з кутовою швидкістю обертання Землі, тому для спостерігача із Землі їхнє розташування на небі залишається незмінним. Для нього такий супутник постійно «висить» в одній точці над горизонтом. Геостаціонарні супутники використовують, наприклад, для трансляції телевізійних програм.)

Дано:
$R_з = 6,4 \cdot 10^6$ м
$g \approx 10$ м/с²
$T = 24$ ч $= 24 \cdot 3600$ с $=$
$= 8,64 \cdot 10^4$ с

r — ?

Аналіз фізичної проблеми, пошук математичної моделі. Оскільки кутова швидкість геостаціонарного супутника збігається з кутовою швидкістю обертання Землі, то періоди обертання супутника та Землі є однаковими ($\omega_1 = \omega_2$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\Rightarrow$ $T_1 = T_2$).

Швидкість руху супутника на висоті h над поверхнею Землі дорівнює:

$$v = \sqrt{\frac{GM_з}{R_з + h}}, \text{ де } R_з + h = r \text{ — радіус орбіти.}$$

Поблизу поверхні Землі $g = \frac{GM_з}{R_з^2}$ $\Rightarrow$ $GM_з = gR_з^2$, звідси:

$$v = \sqrt{\frac{gR_з^2}{r}} = R_з\sqrt{\frac{g}{r}}. \qquad (1)$$

З іншого боку, лінійна швидкість v руху тіла пов'язана з періодом T його обертання співвідношенням:

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (2)$$

Розв'язання, аналіз результатів. Зрівняємо праві частини рівностей (1) і (2): $R_з\sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$, звідки знайдемо r:

$$\frac{R_з^2 g}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \Rightarrow R_з^2 g T^2 = 4\pi^2 r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{R_з^2 g T^2}{4\pi^2}.$$

Остаточно маємо: $r = \sqrt[3]{\frac{R_з^2 g T^2}{4\pi^2}}$.

Визначимо значення шуканої величини:

$$[r] = \sqrt[3]{м^2 \cdot \frac{м}{с^2} \cdot с^2} = м; \quad \{r\} = \sqrt[3]{\frac{(6,4 \cdot 10^6)^2 \cdot 10 \cdot (8,64 \cdot 10^4)^2}{4 \cdot (3,14)^2}} \approx 42,4 \cdot 10^6;$$

$$r = 42,4 \cdot 10^6 \text{ м.}$$

Проаналізуємо результат: радіус Землі дорівнює $6,4 \cdot 10^6$ м, обчислений радіус орбіти — $42,4 \cdot 10^6$ м, що більше за радіус Землі й має той самий порядок; таким чином, результат цілком реальний.

Відповідь: середній радіус орбіти геостаціонарного супутника Землі $r = 42,4 \cdot 10^6$ м.

Підбиваємо підсумки

Швидкість, яку слід надати тілу в момент запуску з даної планети, щоб це тіло рухалося по колу, центр якого збігається з центром даної планети, називають першою космічною швидкістю.

Першу космічну швидкість на висоті h над поверхнею планети можна обчислити за формулою $v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$. Для різних планет значення першої космічної швидкості є різними. Біля поверхні Землі $(h=0)$ перша космічна швидкість v дорівнює: $v=\sqrt{gR_З}=7{,}9$ км/с.

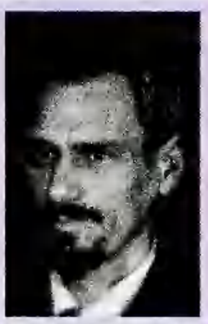
Контрольні запитання

1. Чому в разі певної швидкості руху тіло, кинуте горизонтально, не падає на Землю? 2. Дайте визначення першої космічної швидкості. 3. Виведіть формулу для обчислення швидкості руху супутника на висоті h над поверхнею Землі. 4. Виведіть формулу для обчислення першої космічної швидкості поблизу поверхні Землі $(h=0)$. Чому дорівнює ця швидкість? 5. Які супутники називають геостаціонарними? Де їх застосовують?

Вправа № 20

1. Визначте прискорення вільного падіння та першу космічну швидкість для тіла поблизу поверхні Марса, вважаючи, що маса Марса дорівнює $6{,}5\cdot10^{23}$ кг, а його діаметр — 6800 км.
2. На якій висоті над поверхнею Землі перебуває супутник, якщо він рухається зі швидкістю 4 км/с?
3. Середня висота, на якій супутник рухається над поверхнею Землі, дорівнює 1700 км. Знайдіть швидкість руху та період обертання супутника.
4*. Визначте радіус колової орбіти першого штучного супутника Землі, якщо за 92 доби польоту він здійснив 1440 обертів навколо Землі.

ФІЗИКА ТА ТЕХНІКА В УКРАЇНІ



Ю. В. Кондратюк

Юрій Васильович Кондратюк (*Олександр Гнатович Шаргей*) (1897–1941) (див. фото) — один із піонерів ракетної техніки. Майбутній вчений зацікавився космічними польотами ще гімназистом. Він навчався у полтавській гімназії, згодом — на механічному відділенні Петроградського політехнічного інституту.

У книжці «Тим, хто читатиме, щоб будувати» (1919) Ю. Кондратюк навів схему чотириступеневої ракети на киснево-водневому паливі, дав опис камери згоряння двигуна, а у книжці «Завоювання міжпланетних просторів» (1929) запропонував здійснювати польоти на Місяць у три етапи, використовуючи для живлення систем космічного корабля сонячну енергію (!). Американський астронавт *Ніл Армстронг*, який першим ступив на поверхню Місяця, спеціально побував у Новосибірську й узяв жменю землі біля стін будинку, де мешкав Ю. Кондратюк, сказавши: «Ця земля для мене має не меншу цінність, аніж місячний ґрунт». А один із учених, задіяних у програмі НАСА з освоєння Місяця, заявив: «Ми розшукали маленьку непримітну книжечку, видану в Росії відразу після революції. Автор її, Юрій Кондратюк, обґрунтував і розрахував енергетичну вигідність польоту на Місяць за схемою: політ на орбіту Місяця — старт на Місяць з його орбіти — повернення на орбіту Місяця — політ до Землі». На пропозицію американських фахівців трасу польоту на Місяць названо *трасою Кондратюка*.

§ 24. ДЕФОРМАЦІЯ ТІЛ. ВИДИ ДЕФОРМАЦІЇ

?! Ви вже знаєте: якщо на тіло діє сила, то вона надає цьому тілу прискорення. Але є ще один наслідок дії на тіло сили — *деформація*. Про те, що таке деформація, за яких умов вона виникає, які існують види деформації та коли тіла їх зазнають, йтиметься в цьому параграфі.

1 Що таке деформація

Якщо на пружину поставити тягар, то під його дією пружина стиснеться — її довжина зменшиться; якщо пом'яти в руці шматочок пластиліну, то зміниться його форма; якщо натягти тятиву лука, то одночасно зміняться її розміри та форма.

Зміну форми або розмірів тіла називають **деформацією.**

Причина виникнення деформації полягає в тому, що під дією сил, прикладених до тіла, його різні частини рухаються по-різному й у результаті частини тіла зміщуються одна відносно одної. За характером зміщення частин тіла одна відносно одної розрізняють деформації *стиснення, розтягнення, зсуву, вигину, кручення*. Для опису різних видів деформацій скористаємося *механічною моделлю твердого тіла* (рис. 24.1).

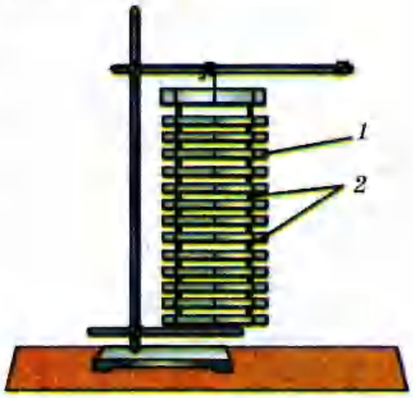


Рис. 24.1. Механічна модель твердого тіла: *1* — паралельні пластини, що імітують шари молекул у твердому тілі; *2* — пружини, що з'єднують пластини й імітують взаємодію між молекулами

Візьмемо механічну модель твердого тіла (рис. 24.2, *а*) і спочатку притиснемо її зверху рукою. Під дією руки верхні пластини почнуть переміщуватися вниз, нижні ж залишаться практично нерухомими; у результаті модель змінить свої розміри — деформується (рис. 24.2, *б*). Приблизно так само при стисканні твердого тіла зміщуються в напрямку дії сили шари його молекул, у результаті чого розміри тіла зменшуються — тіло деформується. Таку деформацію називають *деформацією стиснення* — її зазнають стовпи, ніжки столів і стільців, фундаменти будинків і т. д.

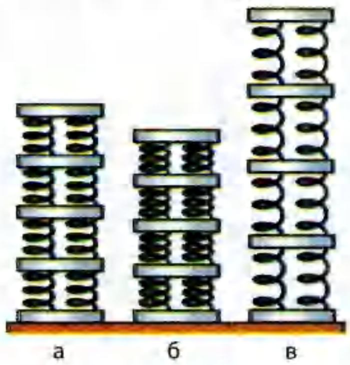


Рис. 24.2. Демонстрація деформації стиснення (*б*) і розтягнення (*в*) за допомогою механічної моделі твердого тіла

Якщо ж тіло розтягувати, то під дією руки шари молекул розійдуться і тіло знову змінить свої розміри (рис. 24.2, *в*). Таку деформацію називають *деформацією розтягнення* — її зазнають троси, канати, ланцюги в піднімальних пристроях, стяжки між вагонами тощо.