Олімпіада УЗФТШ – 2010.
Задачі з математики.

Задача М1. Зі смужок розміром 1×7 склали квадрат. Показати, що якщо це не квадрат 7×7, то всередині нього знайдуться 7 смужок, котрі, примикаючи одна до іншої, утворюють квадрат 7×7.

Задача М2. Знайти всі пари натуральних чисел m и n $(m \le n)$, менших за 2010, таких, що $\frac{m!n!}{2^{m+n-3}}$ – ціле і $m+n$ приймає найбільше значення.

Задача М3. Дана система типу підшипника, котра складається з 12 кіл. Одинадцять з них мають радіус $r = 1$ і торкаються більшого кола з радіусом $R = 3$. Менші кола не перетинаються, але можуть торкатися одне іншого. Показати, що площа випуклої оболонки такої системи менша, ніж 23π.
(Множина називається *випуклою*, якщо разом із будь-якими двома своїми точками вона містить і весь відрізок, що з'єднує ці точки. *Випуклою оболонкою* множини A називається найменша випукла множина B, що охоплює множину A. Наприклад, випуклою оболонкою множини, що складається з двох точок, є відрізок з кінцями в цих точках; випукла оболонка кола є круг; випукла оболонка системи з двох паралельних відрізків – трапеція, основами котрої є дані відрізки.)

Задача М4. Функція $f(x)$ така, що $f(f(x)) = x \ \forall x \in R$. Відомо, що $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$.
Знайти $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Задача М5. В рівносторонньому трикутнику ABC на вписаному колі знайшлась така точка P, що $\angle PAB = \angle PBC = \alpha$, при цьому $\alpha < \frac{\pi}{6}$. Зайдіть кут α.

Задача М6. Всередині відрізка довжиною 2009 відмітили 48 точок A_i $(i = 1,2,\ldots,48)$, котрі розбивають його на 49 рівних частин. Потім, всередині того ж відрізка відмітили 40 точок B_j $(j = 1,2,\ldots,40)$, котрі розбивають його на 41 рівну частину. Таким чином, отримали розбиття даного відрізка 88 точками. Всі отримані ланки розфарбували послідовно червоним і синім кольором. Чому дорівнює різниця сумарної довжини червоних і синіх відрізків?

Задача М7. З послідовних 50 натуральних чисел вибрали довільно 22 елемента. Показати, що серед них знайдеться пара чисел, сума квадратів котрих ділиться на 5.

Задача М8. Відомо, що найменше з трьох натуральних чисел x, y, z – парне. Знайти всі такі трійки, щоб число $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xyz}$ було цілим.

Задачі з фізики.

Задача Ф1. Через блок, що знаходиться високо вгорі, перекинуто і зафіксовано легкий нерозтяжний гнучкий шнур, на кінцях якого на висоті H над землею підвішені гирьки масами M та m. В початковий момент часу шнур відпускають і гирьки починають рухатись під дією сили тяжіння. Через який час система прийде в стан спокою, якщо удар гирьки об землю є абсолютно непружним?

Задача Ф2. Настінний годинник з маятником підвісили на двох довгих паралельних шнурах, прикріплених до стелі. Яка помилка в показаннях годинника накопиться за добу, якщо, будучи закріпленим на стіні, годинник йшов точно. Маса гирьки на кінці легкого маятника 150 г, а повна маса годинника 5 кг.

Задача Ф3. Під час руху трамвая по горизонтальній ділянці шляху з деякою швидкістю двигун трамвая споживає струм I_0=100А, при цьому ККД двигуна дорівнює η=0,9. Під час руху трамвая похилою ділянкою шляху вниз з тією ж швидкістю струм в його двигуні дорівнює нулю (двигун вимкнено). Який струм буде споживати двигун трамвая під час підйому трамвая тією ж похилою ділянкою шляху з тією ж швидкістю?